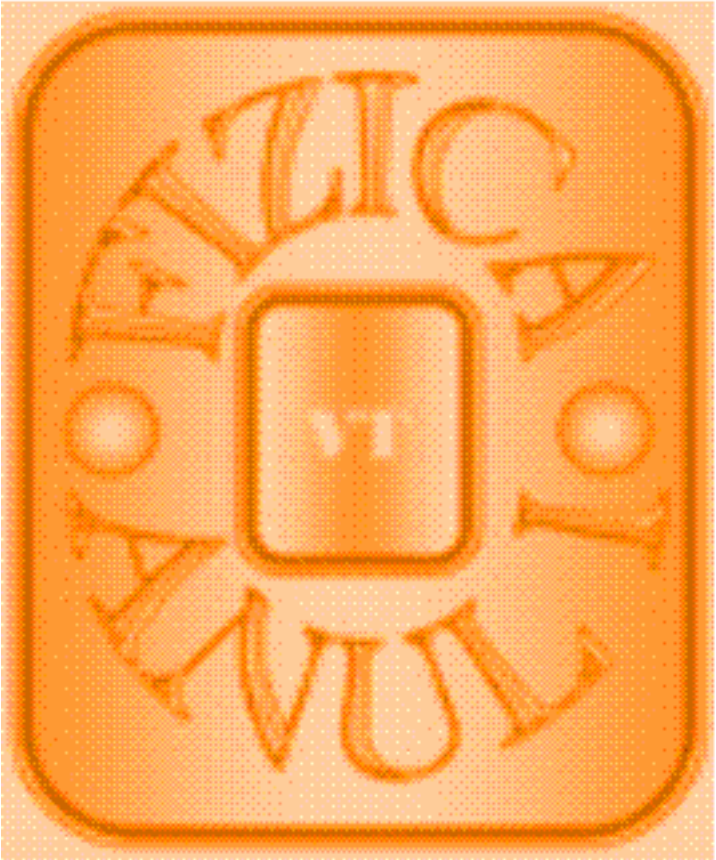
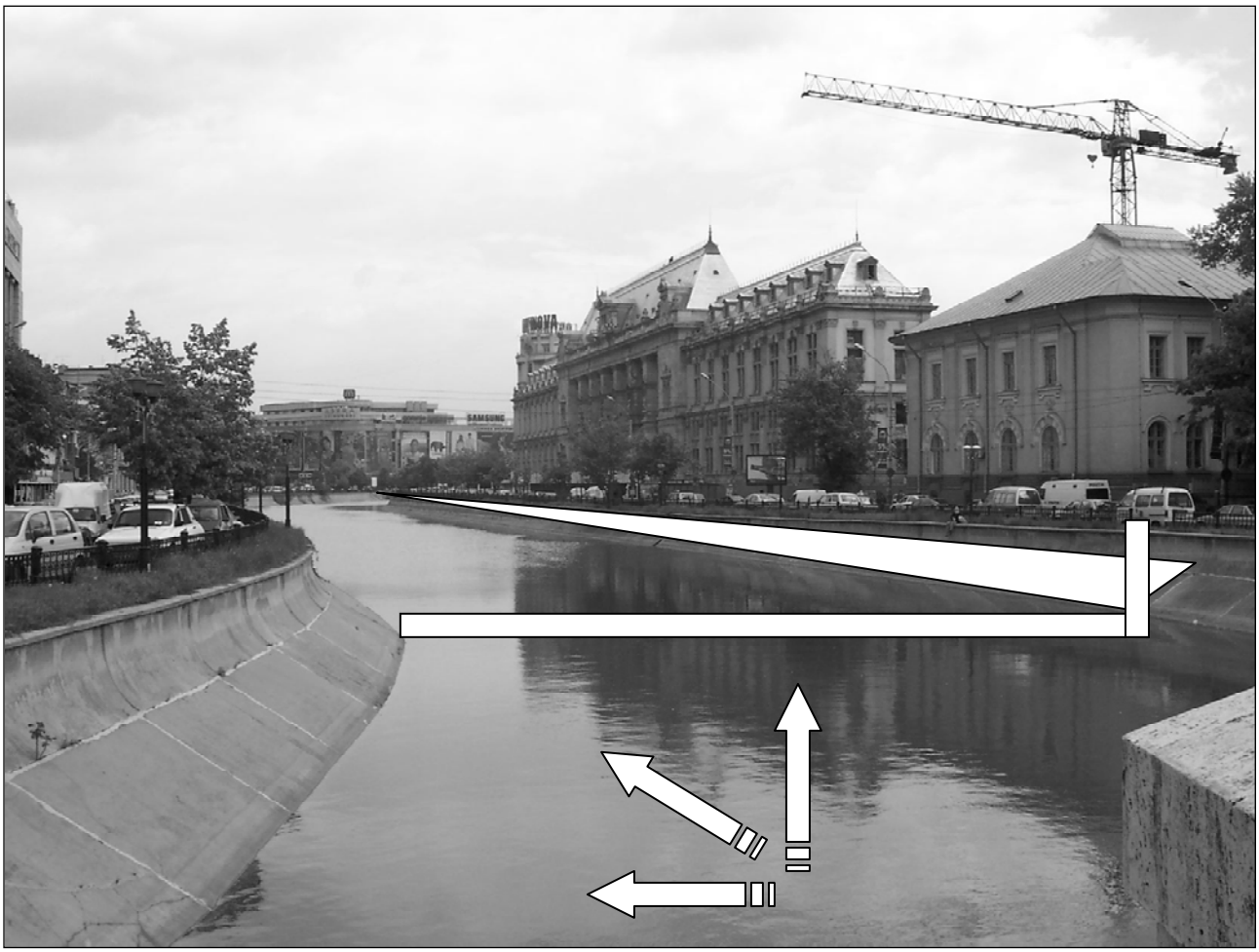


Vlad Truță

MECANICĂ

1. CINEMATICA

1.1. SISTEME DE REFERINȚĂ

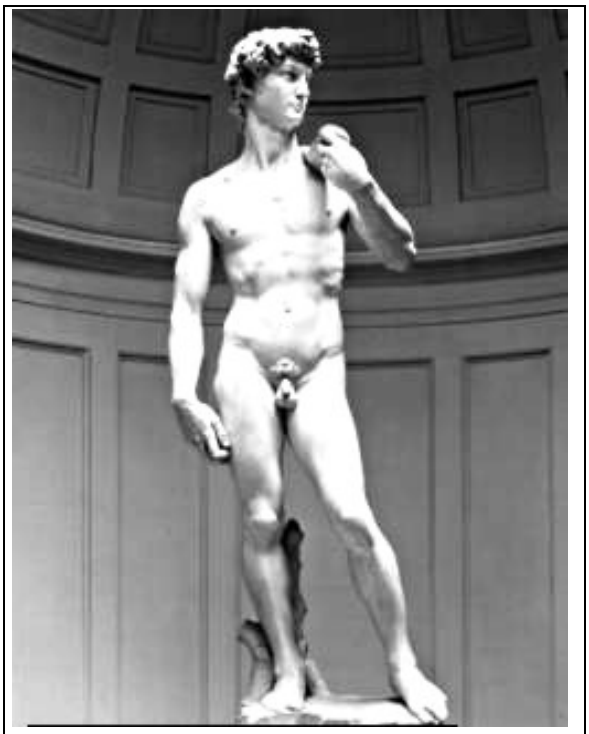


Nimic mai frumos decât Bucureştiul ! Chiar şi cu macarale în prim plan şi cu o Dâmboviță care nu prea aduce cu Sena sau Tamisa…

Totuşi, *vă sugerează ceva această imagine* ? Nu mă refer la ideea de justiție pentru că am surprins în imagine clădirea Tribunalului. Mă refer la noțiunea de perspectivă. Da ! Perspectiva care face apel la trei dimensiuni spațiale : lățime, înălțime şi profunzime – reprezentate aici prin trei săgeți.

PROBLEMA DE LA PAGINA 1

Poate fi posibil ca privind o fotografie să estimați înălțimea unui obiect aflat într-un plan îndepărtat ? Indicație : Ar fi bine să vă amintiți unele noțiuni elementare de geometrie şi veți constata că misiunea este realizabilă !



David, sculptură a lui Michelangelo

Cele trei dimensiuni spaţiale se regăsesc şi în fiinţa noastră – superba fiinţă umană pe care ne-o înfăţişează creatorii de artă. Pentru noi toţi există diferenţa între sus-jos, faţă-spate, stânga-dreapta. Pe scurt, simţurile noastre ne spun că **existăm în spaţiu şi spaţiul are trei dimensiuni**.

Au existat şi există îndelungi dezbateri filosofice şi chiar ştiinţifice asupra existenţei sau neexistenţei spaţiului şi, dacă acesta există, asupra proprietăţilor sale. Ceea ce ne interesează în lucrarea de faţă nu sunt aceste discuţii şi ipoteze, ci doar o simplă abordare pragmatică a realităţii înconjurătoare, care să ne permită să extragem concluzii şi legi folositoare în activitatea noastră de fiecare zi. Prin urmare, ne vom mărgini să afirmăm următoarele :

✍ Spaţiul este infinit în toate direcţiile. Spaţiul este omogen şi izotrop, adică proprietăţile sale sunt aceleaşi în orice punct şi în orice direcţie. Spaţiul are trei dimensiuni.

O altă percepţie a simţurilor noastre este aceea a trecerii timpului. Cu alte cuvinte, **trăim în timp**. Se pot spune multe şi despre timp. Pot exista controverse. Chiar şi în fizică teoria relativităţii face afirmaţii despre timp, care multora li se pot părea curioase. Restrângându-ne la abordarea pragmatică despre care discutam, vom afirma următoarele :

✍ Timpul se scurge liniar de la trecut spre viitor, uniform în spaţiu şi independent de prezenţa corpurilor care se află în spaţiu.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 2

Afirmaţiile pe care le facem aici despre spaţiu şi timp sunt strict valabile în cazul mecanicii clasice. Aceste afirmaţii nu sunt probate experimental, ba chiar există dovezi experimentale şi teoretice care le contrazic.

Spațiul din jurul nostru este populat cu corpuri materiale, mobile sau imobile. Cu alte cuvinte, unele dintre aceste corpuri își modifică poziția în raport cu celelalte.

✍ Ceea ce-şi propune CINEMATICA ca ştiință este să studieze mişcările şi să găsească legile după care se desfăşoară acestea.

✍ Legile mişcării pot fi enunțate **calitativ**, în cuvinte, sau **cantitativ**, sub formă de expresii matematice.

Forma matematică a legilor de mişcare poate fi stabilită numai definind mărimi fizice măsurabile, măsurându-le experimental şi găsind astfel corelațiile căutate.

CUGETAREA DE LA PAGINA 3

Tot ceea ce se găseşte în spațiu se supune legilor fizicii. Dacă cunoşti şi asculți aceste legi, spațiul te va trata cu blândețe. Şi nu-mi mai spuneți că omul nu are ce căuta acolo. Locul omului este acolo unde *vrea el* să fie; şi va face multe lucruri bune când va ajunge acolo.

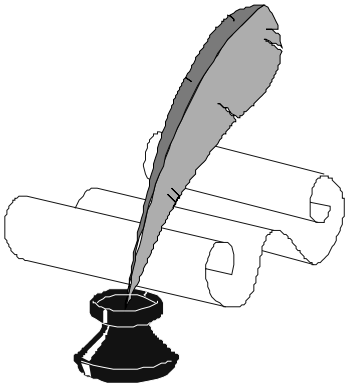
Werner von Braun (1912–1977)

Referitor la spaţiu şi timp, se pot defini două mărimi fizice măsurabile :

- DISTANŢA
- DURATA

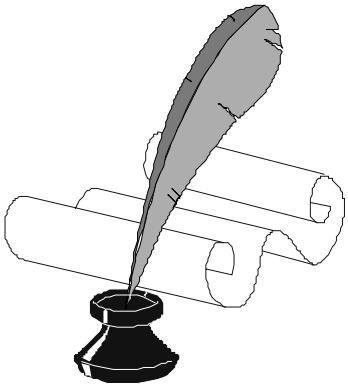
Măsurarea distanţelor şi duratelor se face cu ajutorul unor etaloane, care mai sunt denumite **unităţi de măsură**.

În Sistemul Internaţional de Unităţi de Măsură, distanţele se măsoară în **metri**, iar duratele în **secunde**. Distanţa (lungimea) şi durata (timpul) sunt mărimi fizice fundamentale ale Sistemului Internaţional de Unităţi de Măsură. Ca şi orice alte mărimi fizice fundamentale, distanţa şi durata au unităţi de măsură stabilite arbitrar.



Istoria metrului începe în 1791, când Academia Franceză l-a definit ca 1/ 40.000.000 din lungimea meridianului terestru care trece prin Paris. În 1889, Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi a definit metrul drept distanţa între două linii trasate pe o bară confecţionată dintr-un aliaj de platină şi iridiu. Progresele în domeniul opticii au condus în 1960 la o nouă definiţie : metrul este de 1.650.763,73 mai mare decât lungimea de undă a radiaţiei roşu-portocalii a atomului de kripton 86, în vid. Ultima definiţie, în vigoare şi la ora actuală, datează din 1983 şi este următoarea : metrul este distanţa parcursă de lumină în vid în a 299.792.458-a parte dintr-o secundă.

Iniţial, secunda a fost definită ca a 86400-a parte a duratei zilei solare medii. La mijlocul secolului XX a fost necesară o definire mai precisă a unităţii de măsură a timpului. În 1960, Biroul Internaţional de Măsuri şi Greutăţi a adoptat definiţia după care secunda este 1/31.556.925,9747 din durata anului tropic 1900. Deoarece această definiţie nu era operaţională (anul 1900 fiind de mult trecut), în 1964 a fost propusă o nouă definiţie a secundei, care a fost adoptată în 1967 şi este încă în vigoare. Aceasta este : secunda este intervalul de timp în care se efectuează 9.192.631.770 oscilaţii asociate tranziţiei între două nivele hiperfine ale stării fundamentale a atomului de cesiu 133.

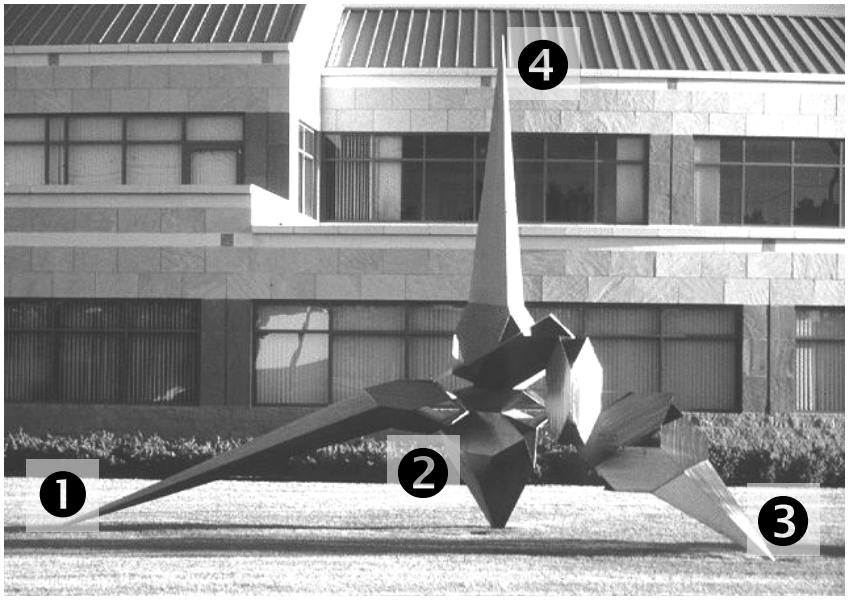


Putem remarca faptul că deşi etaloanele de timp şi lungime sunt printre cele mai vechi, definirea lor precisă se face pe baza studiilor de fizică contemporane, efectuate în domenii care nu au nici-o legătură cu mecanica clasică.

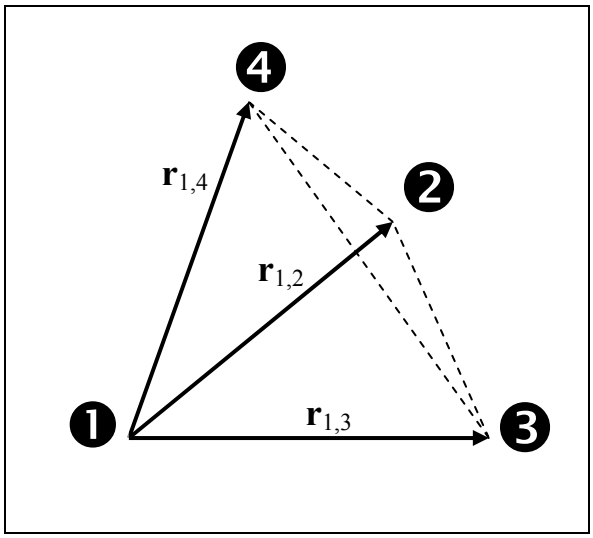
PRECIZAREA DE LA PAGINA 4

Deşi legislaţia în vigoare impune folosirea metrului şi secundei ca unităţi de măsură, acestea nu pot fi adecvate unor anumite situaţii. Două cazuri, să spunem extreme, ar fi dimensiunile specifice „lumii” atomilor care se pot măsura în angstromi (1 Å = 10^{-10} m) sau cele cosmice ce se pot estima în parseci (1 parsec = 3,26 ani-lumină = $3{,}09 \cdot 10^{13}$ km).

După ce am definit mişcarea ca modificarea poziției relative a corpurilor în spațiu, pe măsura trecerii timpului, am vorbit despre cinematică ca despre ştiința care urmăreşte să stabilească forma cantitativă a legilor de mişcare, am precizat că forma cantitativă a legilor fizicii se poate stabili numai în urma măsurătorilor experimentale şi că măsurătorile se pot face doar având la îndemână etaloanele adecvate, mai rămâne o singură întrebare : dar *care sunt corpurile care nu se mişcă şi care sunt corpurile în mişcare* ? Răspunsul la această întrebare, aparent simplă, este foarte complicat ! Vom încerca găsirea unei explicații cât de cât satisfăcătoare într-unul din capitolele următoare. Pentru început să încercăm o *definiție operațională* a ceea ce înseamnă starea de mişcare.



Privind sculptura din imaginea alăturată, putem observa că indiferent unde ar fi dusă – chiar dacă s-ar afla pe puntea unui vapor care traversează oceanul, sau într-o navetă cosmică – distanțele între cele patru colțuri ale ei nu se modifică în timp. Putem trage concluzia că **respectivele patru colțuri formează un sistem de corpuri de referință, imobile unele în raport cu celelalte**.



Față de corpul 1, corpurile 2, 3, 4 au vectorii de poziție $\mathbf{r}_{1,2}$, $\mathbf{r}_{1,3}$ şi $\mathbf{r}_{1,4}$.

Matematic vorbind, aceşti trei vectori de poziție alcătuiesc o bază de vectori în spațiul tridimensional. Prin operații matematice relativ simple această bază poate fi transformată într-o bază de trei vectori ortonormați $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, şi $\mathbf{e}_z$ care indică direcțiile şi sensurile a trei axe de coordonate carteziene.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 5

Versorii unui baze ortonormate verifică relațiile :

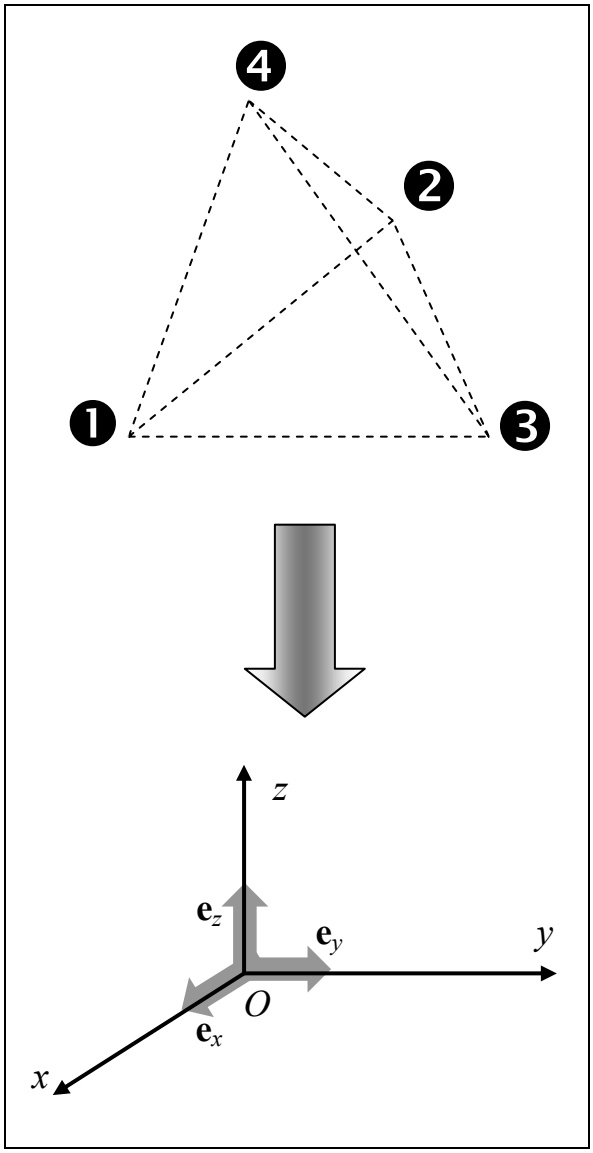
$$\mathbf{e}_x^2 = 1,\ \mathbf{e}_y^2 = 1,\ \mathbf{e}_z^2 = 1$$

$$\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{e}_y = 0,\ \mathbf{e}_y\cdot\mathbf{e}_z = 0,\ \mathbf{e}_z\cdot\mathbf{e}_x = 0$$

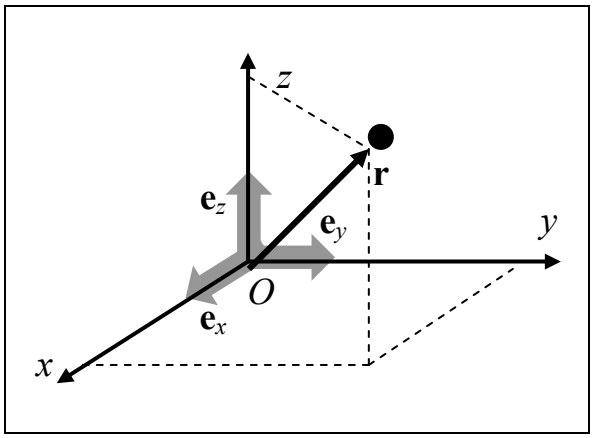
$$\mathbf{e}_x\times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z,\ \mathbf{e}_y\times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x,\ \mathbf{e}_z\times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

Orice vector este o combinație liniară a celor trei versori :

$$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{e}_x + A_y\,\mathbf{e}_y + A_z\,\mathbf{e}_z$$



Construirea sistemului de axe de coordonate ca şi afirmaţia că modulul unui versor este unitar nu presupun doar aspecte matematice ci şi aspecte fizice. Rezultatul final este bazat pe cunoaşterea raporturilor între modulele celor trei vectori de poziţie iniţiali. De asemenea, matematic vorbind, coordonatele x, y şi z sunt simple numere, incapabile să exprime prin ele însele poziţia unui corp. De aceea, ***sensul fizic* al noţiunii de sistem de axe de coordonate presupune existenţa unui etalon de lungime**. Coordonatele x, y, z sunt numerele care arată de câte ori se cuprinde etalonul de lungime în distanţele Ox, Oy sau Oz măsurate în lungul axelor de coordonate fizice. De altfel, chiar şi axele de coordonate din desenul alăturat sunt de natură fizică şi nu abstractă (adică sunt trasate pe un suport material, au anumite dimensiuni spaţiale ş.a.m.d.)



Vectorul de poziţie al unui punct din spaţiu se exprimă în funcţie de proiecţiile ortogonale ale punctului pe cele trei axe de coordonate (adică, pe scurt, coordonatele punctului) şi versorii axelor de coordonate :

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z$$

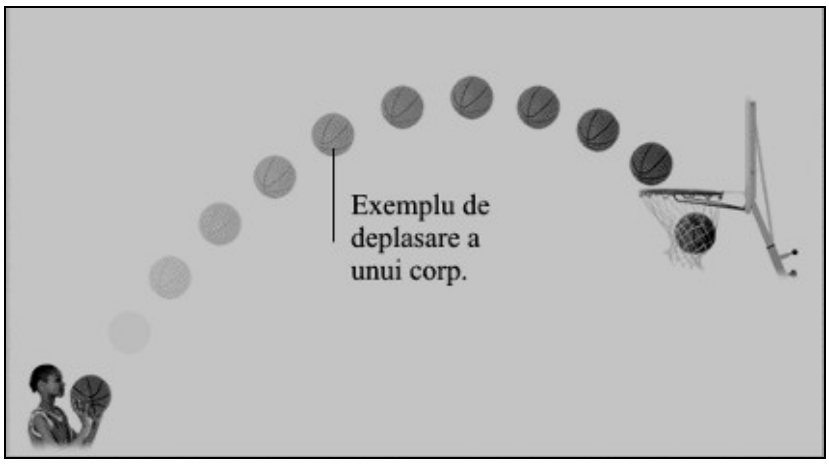
În practică, coordonatele nu sunt simple numere, ci mărimi fizice măsurate cu etalonul de lungime ales.

PROBLEMA DE LA PAGINA 6

Calculaţi distanţa dintre punctele **A** şi **B** ale căror vectori de poziţie sunt :

$$\mathbf{r_A} = 2\,\mathbf{e}_x + 4\,\mathbf{e}_y + 3\,\mathbf{e}_z \text{ (m)}$$

$$\mathbf{r_B} = 300\,\mathbf{e}_x + 200\,\mathbf{e}_y + 500\,\mathbf{e}_z \text{ (cm)}$$



Cu trecerea timpului, poziția ocupată de un corp se poate modifica în raport cu corpurile de referință şi, implicit, în raport cu sistemul de coordonate. Imaginea alăturată vă prezintă pozițiile succesive ale unei mingi de baschet, sugerându-vă trecerea timpului prin intensitatea tonurilor de gri. Evoluția de la un ton de gri la altul este o modalitate grafică de a marca trecerea unor durate egale, sau, cu alte cuvinte, simbolizează indicațiile unui ceas.

Acestea fiind spuse, ajungem în sfârşit la ceea ce denumeam la pagina 5 drept o „*definiție operațională* a ceea ce înseamnă starea de mişcare”. Potrivit acesteia, **mişcarea reprezintă modificarea în timp a poziției unui corp în cadrul unui SISTEM DE REFERINȚĂ**.

Sistemul de referință este un concept fizic care include următoarele elemente :

- Un ansamblu de corpuri de referință considerate fixe
- Un sistem de axe de coordonate, ataşat corpurilor de referință
- Un etalon de lungime, adică o unitate de măsură a distanțelor şi un instrument cu care se poate face măsurătoarea de lungime (riglă)
- Un etalon de timp, adică o unitate de măsură a duratelor de timp şi un instrument cu care se poate face măsurătoarea de timp (ceas)

Măsurarea experimentală a stării de mişcare a unui corp înseamnă în acest context determinarea simultană a valorilor coordonatelor mobilului şi a momentelor de timp corespunzătoare.

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 7

Galileo Galilei a descoperit că perioadele micilor oscilații ale unui pendul gravitațional nu depind de amplitudinea de oscilație a acestuia urmărind oscilațiile unui candelabru, în timp ce participa la o slujbă religioasă. Întrebarea este : cum a reuşit aceasta fără a avea un ceas sau alt instrument de măsură a timpului ?

1.2. RELATIVITATEA MIŞCĂRII ŞI A REPAUSULUI

Nu vom vorbi aici despre relativitatea percepţiilor umane, ci ne vom întreba despre ceva mult mai concret : sunt mişcarea sau repausul noţiuni absolute sau nu ?

Dacă aş afirma că baronul von Münchhausen, călare pe o ghiulea în zbor, este în repaus, în vreme ce melcul se deplasează cu o viteză de aproximativ 30 km/s, m-aţi crede probabil la fel de „sincer” ca şi pe celebrul mincinos-baron, sau la fel de „inteligent” ca pe melc. Cu toate acestea s-ar putea să am dreptate, fireşte omiţând să vă fi spus ceva de la bun început. Ce ar fi trebuit să vă comunic era că atunci când mă refeream la starea de mişcare a baronului, corpul de referinţă era ghiuleaua, iar când pomeneam melcul, corpul de referinţă era Soarele. Cei care m-ar fi contrazis ar fi făcut-o, fireşte, cu bună credinţă, dar se lăsau ei înşişi înşelaţi de o prejudecată, şi anume că pământul pe care ne desfăşurăm existenţa este în *repaus absolut*. Prin urmare, raţionamentul lor, bazat pe ideea (şi ea preconcepută) că o ghiulea în zbor se mişcă faţă de pământ mai repede decât un melc, li s-ar fi părut perfect valabil. Şi, ca să întregesc şirul de ciudăţenii din acest paragraf, vă voi mai spune că s-ar putea să am dreptate şi atunci când, păstrând pământul ca sistem de referinţă, afirm că există un interval de timp, chiar şi dacă este aparent mic, în care ghiuleaua se mişcă mai încet decât melcul (de exemplu, dacă ghiuleaua este lansată vertical în sus, în punctul de înălţime maximă pe care-l atinge ea este o clipă în repaus).

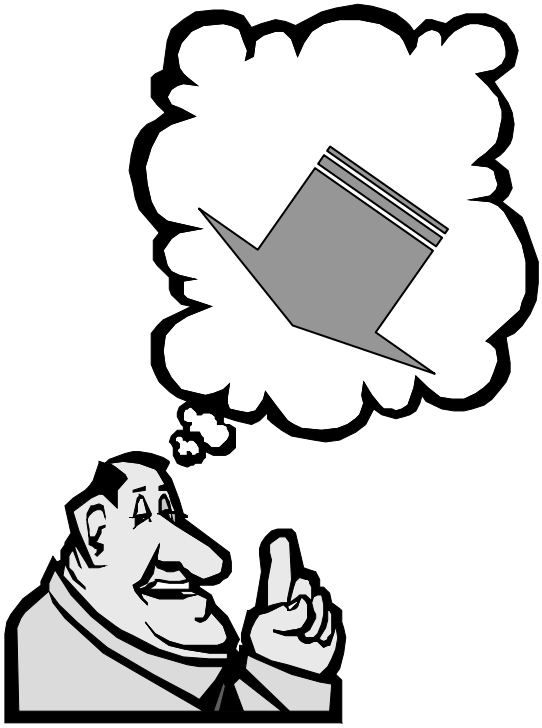
CUGETAREA DE LA PAGINA 8

Apropo de relativitate :

Nu măsura niciodată înălţimea unui munte până nu ai ajuns în vârful lui. Atunci vei vedea cât de scund este.

Dag Hammarskjöld, fost secretar general al ONU

CE CONCLUZII TREBUIE SĂ TRAGEM DIN CELE SPUSE ?



- NU SE POATE VORBI ÎN MOD ABSOLUT DESPRE STAREA DE MIŞCARE SAU DE REPAUS A UNUI CORP
- ÎNAINTE DE A SPUNE DACĂ UN CORP ESTE ÎN REPAUS SAU ÎN MIŞCARE TREBUIE SĂ STABILIM CARE ESTE SISTEMUL DE REFERINȚĂ FAȚĂ DE CARE STUDIEM EVOLUȚIA CORPULUI
- PRIN URMARE, AFIRMĂM CĂ MIŞCAREA SAU REPAUSUL SUNT NOȚIUNI *RELATIVE*, ÎNȚELEGÂND PRIN ACEASTA CĂ OBSERVATORI APARȚINÂND UNOR SISTEME DE REFERINȚĂ DIFERITE POT AVEA PERCEPȚII DIFERITE ÎN CEEA CE PRIVEŞTE STAREA DE MIŞCARE A ACELUIAŞI CORP

Sperând că lucrurile au fost lămurite şi nu încurcate din acest punct de vedere, nu putem, totuşi, să nu ne punem şi unele întrebări :

- *Ce utilitate mai poate avea cunoaşterea legilor de mişcare într-un referențial dat, dacă acestea pot avea o cu totul altă formă în alt referențial* ?
- *Există oare vreo legătură între legile de mişcare ale aceluiaşi corp în sisteme de referință diferite* ?
- *Cauzele care conduc la o anumită formă a legii de mişcare depind şi ele de sistemul de referință ales sau nu* ?

O parte din răspunsurile la aceste întrebări o veți găsi în capitolele următoare.

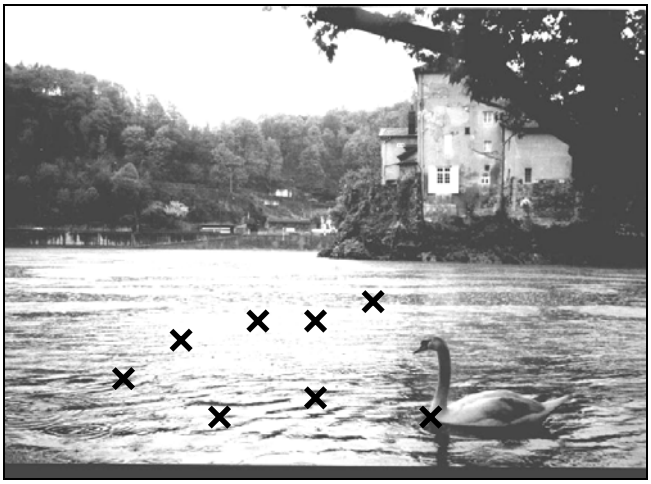
CUGETAREA DE LA PAGINA 9

Apropo de relativitate :

Când faci curte unei fete frumoase, o oră pare o secundă. Dacă stai pe un grătar încins, o secundă pare o oră. Aceasta este relativitatea.

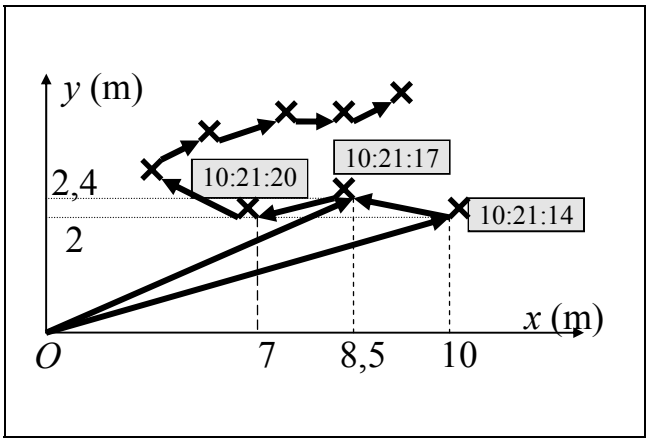
Albert Einstein

1.3. PRINCIPALELE MĂRIMI CINEMATICE



Să privim fotografia din figura alăturată. Aceasta înfățișează o serie de obiecte imobile, dar şi o lebădă care se poate deplasa pe suprafața apei. Dacă am fi repetat fotografierea la anumite intervale de timp, am fi surprins lebăda ocupând succesiv pozițiile marcate prin cruciulițe, în vreme obiectele imobile nu şi-ar fi modificat locul. Fiecare dintre fotografii surprinde o **stare** prin care trece obiectul.

Datele cantitative despre aceste stări sunt coordonatele poziției obiectului şi momentele de timp corespunzătoare. Astfel, prima stare surprinsă în fotografie este caracterizată (vezi figura din dreapta) de coordonatele spațio-temporale :



$$x_1 = 10 \text{ m}$$
$$y_1 = 2 \text{ m}$$
$$t_1 = 10 \text{ h } 21 \text{ min } 14 \text{ s}$$

A doua stare este caracterizată de datele :

$$x_2 = 8{,}5 \text{ m}$$
$$y_2 = 2{,}4 \text{ m}$$
$$t_2 = 10 \text{ h } 21 \text{ min } 17 \text{ s}$$

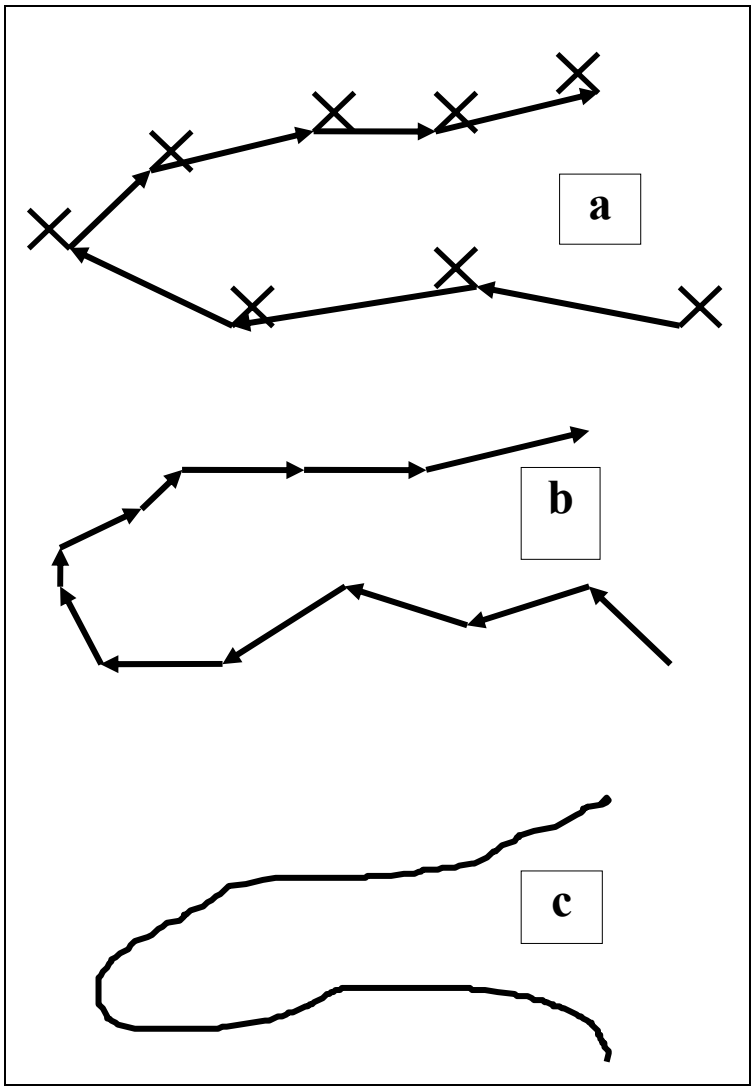
Schimbarea de stare este rezultatul procesului de mişcare mecanică.

CUGETAREA DE LA PAGINA 10

Timpul este ca un râu alcătuit din ceea ce se întâmplă, curgerea sa fiind iute ; nu trece mult de când ceva apare până când piere, iar noul se iveşte pentru a dispărea şi el.

Marcus Aurelius (121–180), Împărat roman

Cele două stări sunt caracterizate de vectorii de poziție $\mathbf{r}_1(x_1, y_1)$, respectiv $\mathbf{r}_2(x_2, y_2)$, şi de momentele de timp t_1, respectiv t_2, iar deplasarea obiectului este caracterizată prin **vectorul deplasare** : $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ şi prin **durata deplasării**: $\Delta t = t_2 - t_1$.



Să privim figura alăturată, cazul **a**. Observăm că vectorii deplasare alcătuiesc o linie frântă, care uneşte poziţiile ocupate de obiect în fiecare dintre fotografiile succesive. Înjumătăţind intervalele de timp după care se repetă fotografierea, se dublează numărul de vectori deplasare ce pot fi reprezentaţi (cazul **b**). Să ne imaginăm că am putea reduce intervalul de timp dintre două fotografii succesive atât de mult încât să surprindem obiectul în *fiecare* din punctele din spaţiu prin care trece. În acest caz segmentele liniei frânte s-ar micşora atât de mult încât s-ar forma o curbă continuă (cazul **c**). Această curbă continuă se numeşte **traiectorie.** Putem remarca că, în general, traiectoria *nu coincide* cu conturul poligonal format de vectorii deplasare. Cu toate acestea, *cu cât numărul de stări utilizat pentru determinarea vectorilor deplasare este mai mare, cu atât conturul poligonal se apropie mai mult de forma reală a traiectoriei*. Rezultă de aici că *procesul de mişcare mecanică poate fi aproximat printr-o succesiune de stări*, al căror număr trebuie să fie suficient de mare pentru ca erorile introduse să fie convenabil de mici.

Traiectoria reprezintă locul geometric al punctelor atinse de un mobil în cursul mişcării sale.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 11

Ce poate însemna afirmaţia „*erorile introduse să fie convenabil de mici*” ? Când mergeţi la film, în faţa ochilor vă sunt proiectate 24 de fotografii în timp de o secundă. Ochiul vostru nu poate discerne fiecare imagine în parte, înregistrând o senzaţie de mişcare adevărată. Cam acesta ar fi înţelesul afirmaţiei menţionate.

Am putea defini traiectoria şi ca **urma lăsată de un corp în mişcare**. Pentru exemplificare priviţi figura alăturată. Jeturile ieşite din motoarele avioanelor lasă pe cer dâre care corespund traiectoriilor fiecărui aparat.

Am vorbit despre avioane. Să trecem la trenuri ! Cunoaşteţi cu toţii o carte extrem de interesantă – de citit mai ales în cursul lungilor călătorii – numită „*Mersul Trenurilor*”. Iată un pasaj din ea :

Relaţia 300				
km	**Gara**	**P 3005**	**A 421**	**E 23**
0	Bucureşti Nord	14:15	19:45	16:25
59	Ploieşti Vest	15:28	20:24	17:04
121	Sinaia	17:06	21:33	17:58
140	Predeal	17:34	21:53	18:18
166	Braşov	18:16	22:30	18:52
294	Sighişoara	-	0:22	20:36
333	Mediaş	-	0:56	21:10
374	Blaj	-	1:32	21:41

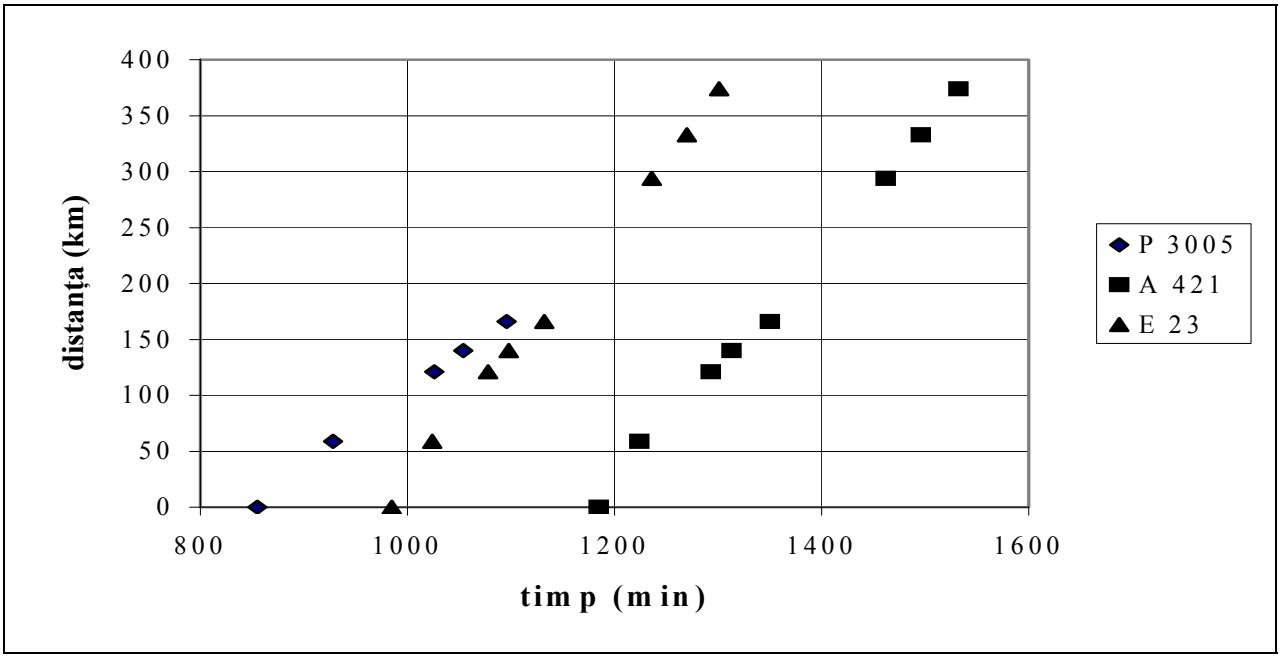
ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 12

Imaginea alăturată arată urma lăsată de un avion cu reacţie. *În ce direcţie se deplasează avionul* ? Veţi răspunde : dinspre stânga-jos spre dreapta-sus. Întrebarea este : ce vă face să afirmaţi acest lucru ?

Privind datele din tabel, observăm că ele reprezintă o listă de coordonate legate de poziție şi timp. *Cum putem să extragem o concluzie din această mulțime de cifre* ? O cale ar fi să facem o reprezentare grafică a distanței în funcție de timp. Vom transforma mai întâi orele în minute, astfel încât să avem o singură unitate de măsură a timpului. Obținem, în acest mod, tabelul de date alăturat :

P 3005			**A 421**			**E 28**		
ore: min	total minute	km	ore: min	total minute	km	ore: min	total minute	km
14: 15	855	0	19: 45	1185	0	16: 25	985	0
15: 28	928	59	20: 24	1224	59	17: 04	1024	59
17: 06	1026	121	21: 33	1293	121	17: 58	1078	121
17: 34	1054	140	21: 53	1313	140	18: 18	1098	140
18: 16	1096	166	22: 30	1350	166	18: 52	1132	166
			24: 22	1462	294	20: 36	1236	294
			24: 56	1496	333	21: 10	1270	333
			25: 32	1532	374	21: 41	1301	374

Fiecare pereche de date timp-distanță o reprezentăm printr-un punct într-un sistem de axe de coordonate. Rezultă graficul de mai jos :

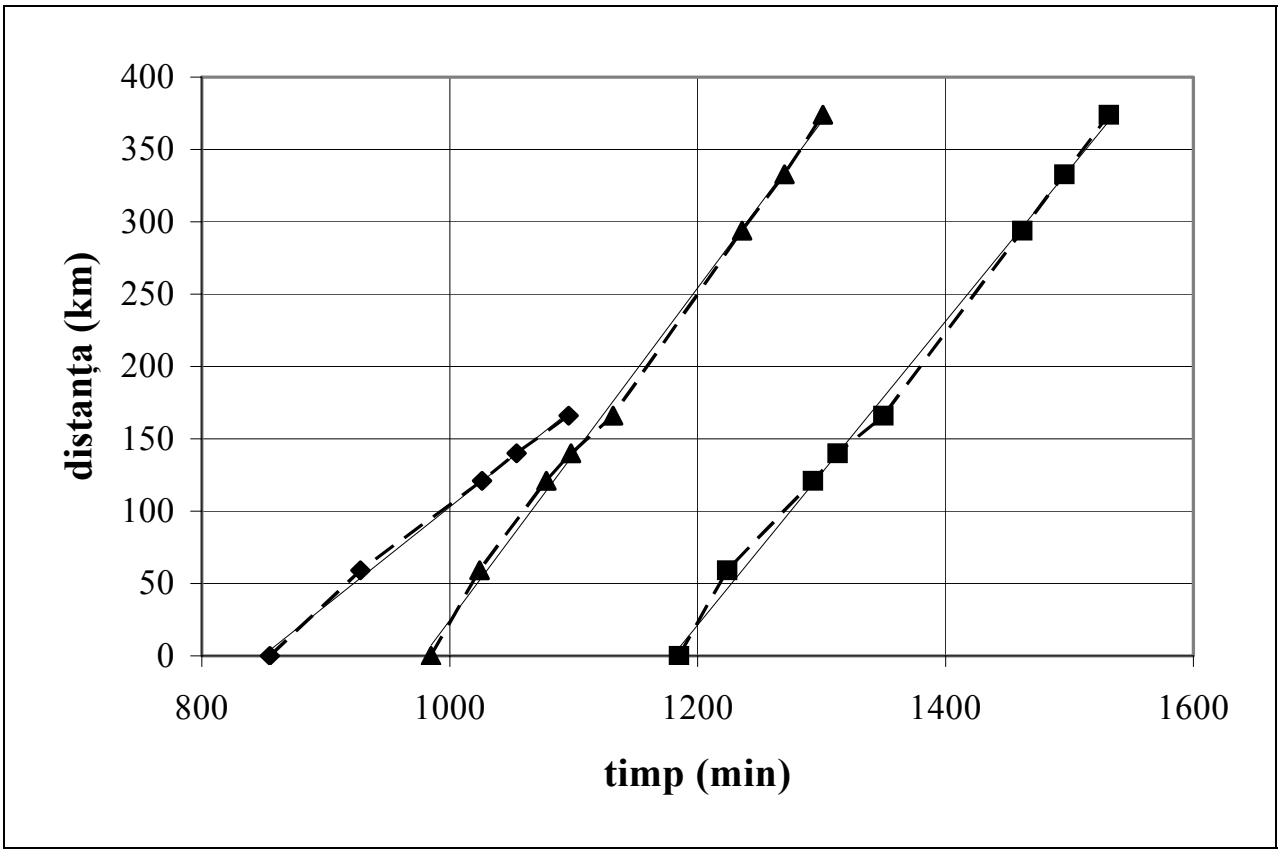


CUGETAREA DE LA PAGINA 13

Adesea asociem numărul 13 cu ghinionul. Iată ce spune francezul **François La Rochefoucauld** (1613–1680) :

Chiar dacă cei mai buni prieteni ai noştri au ghinion, întotdeauna vom găsi ceva nostim în asta !

Ce facem mai departe ? Am putea uni punctele succesive prin segmente de dreaptă (desenate prin linii întrerupte). *Ce remarcăm* ? Curbele obținute sunt aproape niște linii drepte. Din acest motiv, vom încerca în continuare să trasăm niște drepte (de data aceasta ca linii neîntrerupte), care, evident, nu mai pot trece prin toate punctele, dar pot fi astfel desenate încât să lase de o parte sau de alta cam același număr de puncte. Rezultatul este următorul :



Remarcăm că **toate cele trei trenuri au ceva în comun** : *distanța străbătută este* (aproximativ) *o funcție liniară de timp* ! Notând timpul cu t și distanța cu d, putem scrie :

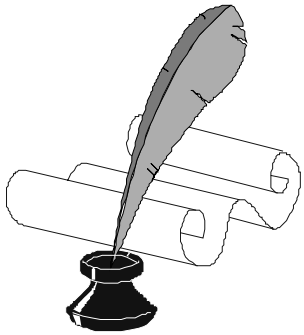
$$d = At + B$$

unde A și B sunt două constante. Valorile acestor constante se pot determina din grafic, rezultând :

P 3005	:	$d = 0{,}68\ t - 579$
A 421	:	$d = 1{,}05\ t - 1237$
E 23	:	$d = 1{,}15\ t - 1125$

PROBLEMA DE LA PAGINA 14

Un călător trebuie să ajungă de la București la Blaj. El ia primul tren (personalul) care-l duce numai până la Brașov. Acolo așteaptă expresul, în care își continuă călătoria. La Mediaș coboară după țigări, pierde trenul și este nevoit să-și termine voiajul mergând cu acceleratul. Construiți graficul distanță-timp al călătorului și determinați constantele A și B.



Aceste expresii ne permit să aflăm unde se află fiecare tren la un anumit moment de timp.

Astfel, pentru :

$$t = 1000 \text{ (min)}$$

personalul ar trebui să se găsească la distanța :

$$d = 0{,}68 \cdot 1000 - 579 = 680 - 579 = 101 \text{ (km)}$$

față de Bucureşti (verificați pe grafic !).

O funcție matematică care ne permite aflarea poziției unui corp la un moment de timp bine stabilit se numeşte **lege de mişcare**.

În general, legea de mişcare se referă la vectorul de poziție. Din acest motiv, în cazul cel mai general, putem scrie:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

unde x,y şi z sunt componentele vectorului de poziție.

Remarcați că **legea de mişcare este o ecuație vectorială**, echivalentă cu trei ecuații scalare referitoare la componentele vectorului de poziție. Acestea din urmă se mai numesc **ecuațiile parametrice de mişcare**.

Să revenim la cele trei trenuri. *Ar putea cele trei legi de mişcare să ne spună care dintre trenuri ajunge mai repede de la Bucureşti la Braşov* ? Pentru a răspunde la întrebare, să luăm din nou cazul personalului. Să scriem legea sa de mişcare la două momente de timp diferite:

$$d_1 = 0{,}68\, t_1 - 579 \quad ; \qquad d_2 = 0{,}68\, t_2 - 579$$

Scăzând cele două relații, rezultă :

$$d_2 - d_1 = 0{,}68\, (t_2 - t_1)$$

Luând $(t_2 - t_1) = 60$ (min), rezultă : $d_2 - d_1 = 40{,}8$ (km). Am aflat astfel că în decurs de o oră personalul se deplasează pe o distanță de 40,8 km. Procedând în mod analog în celelalte două cazuri, găsim că acceleratul parcurge 63 km pe oră, iar expresul 69 km pe oră.

Aceste trei numere ne permit să afirmăm că expresul se deplasează cel mai repede, iar personalul cel mai lent.

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 15

Modul de comparare al rapidităților mişcărilor diferitelor mobile pe care îl prezint pe această pagină este cel tradițional. Cu toate acestea, ar mai putea exista şi un alt mod : cel mai rapid mobil parcurge o distanță dată în cel mai scurt timp. Întrebarea este : de ce este preferat primul mod şi nu al doilea ?

Pentru o analiză cantitativă a mişcărilor unor mobile diferite, este suficient să comparăm distanțele parcurse de acestea în anumite intervale de timp bine determinate.

Raportul dintre distanța parcursă de un mobil şi intervalul de timp necesar pentru aceasta se numeşte **viteză medie**. Formula corespunzătoare acestei definiții este :

$$v_m = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Să revenim la cele trei trenuri. Am aflat deja ce viteză medie are mişcarea lor. *Oare valorile găsite caracterizează orice porțiune a traseului* ? Putem verifica aceasta calculând viteza medie pe diferite tronsoane de drum. Mai întâi calculăm lungimea fiecărui tronson şi apoi durata necesară parcurgerii lui. Raportând lungimea la durată, aflăm viteza medie. Rezultatele pot fi înscrise într-un tabel, după cum urmează :

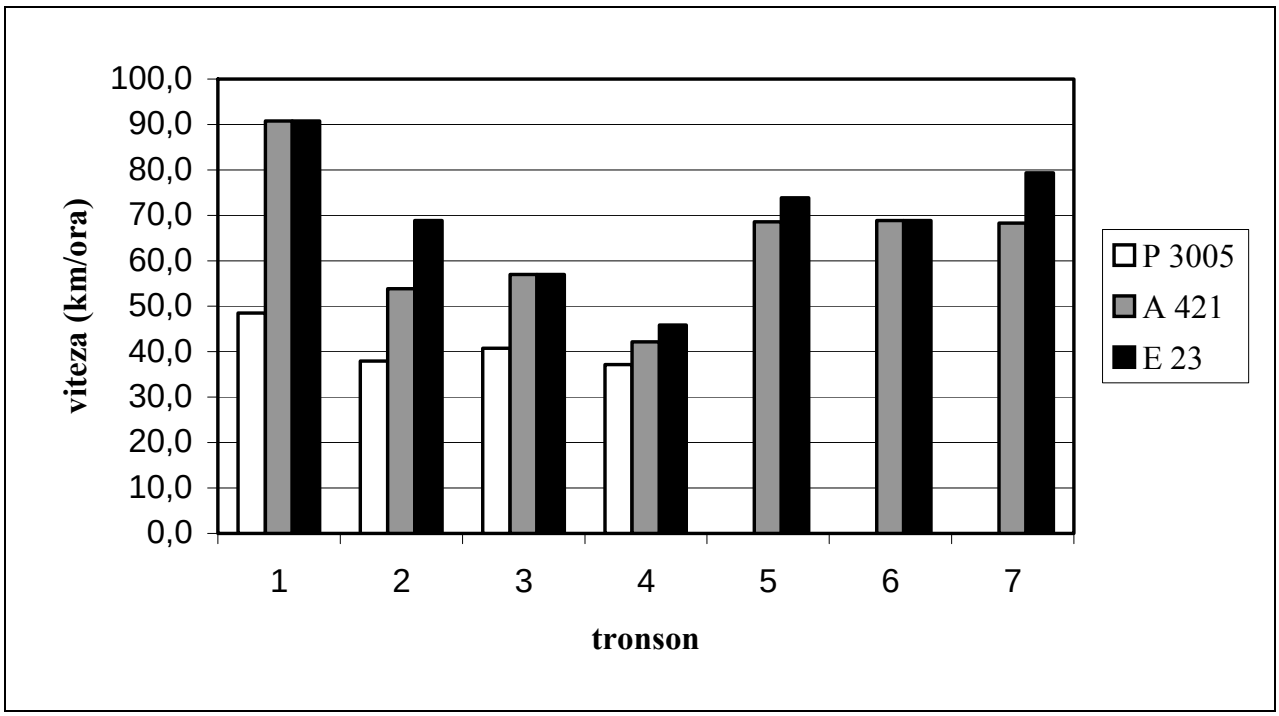
Nr. crt.	**Tronson**	**P 3005**	**A 421**	**E 23**
1	Bucureşti-Ploieşti	48,5 km/oră	90,8 km/oră	90,8 km/oră
2	Ploieşti-Sinaia	38,0 km/oră	53,9 km/oră	68,9 km/oră
3	Sinaia-Predeal	40,7 km/oră	57,0 km/oră	57,0 km/oră
4	Predeal-Braşov	37,1 km/oră	42,2 km/oră	45,9 km/oră
5	Braşov-Sighişoara	-	68,6 km/oră	73,8 km/oră
6	Sighişoara-Mediaş	-	68,8 km/oră	68,8 km/oră
7	Mediaş-Blaj	-	68,3 km/oră	79,4 km/oră

Datele din tabel pot fi reprezentate sub forma unei diagrame, ceea ce uşurează compararea şi interpretarea lor.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 16

Pentru că viteza este o mărime fizică definită cu ajutorul altor mărimi fizice (distanța şi durata), unitatea sa de măsură este definită, la rândul ei, în funcție de unitățile de măsură ale acestor mărimi fizice. Astfel :

$$[v_m] = \frac{[\Delta d]}{[\Delta t]} \Rightarrow [v_m]_{SI} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Puteți vedea mai sus o astfel de diagramă.

Remarcăm că viteza medie nu este aceeaşi pe orice porțiune de drum ! Rezultă de aici că informația cuprinsă în valoarea vitezei medii are semnificație numai dacă precizăm şi segmentul de drum pe care ea a fost calculată.

Viteza medie nu poate caracteriza **starea de mişcare** a unui obiect, adică nu poate oferi o informație legată de un moment concret de timp !

Şi atunci, *cum putem face distincția dintre starea de obiect mobil sau imobil* ?

Simpla precizare a coordonatelor spațio-temporale este insuficientă, ceea ce înseamnă că este necesară definirea unei mărimi fizice, a cărei valoare măsoară cantitativ diferența dintre obiectul fix şi cel în mişcare. Această mărime fizică se numeşte **viteză momentană**, sau pur şi simplu **viteză**.

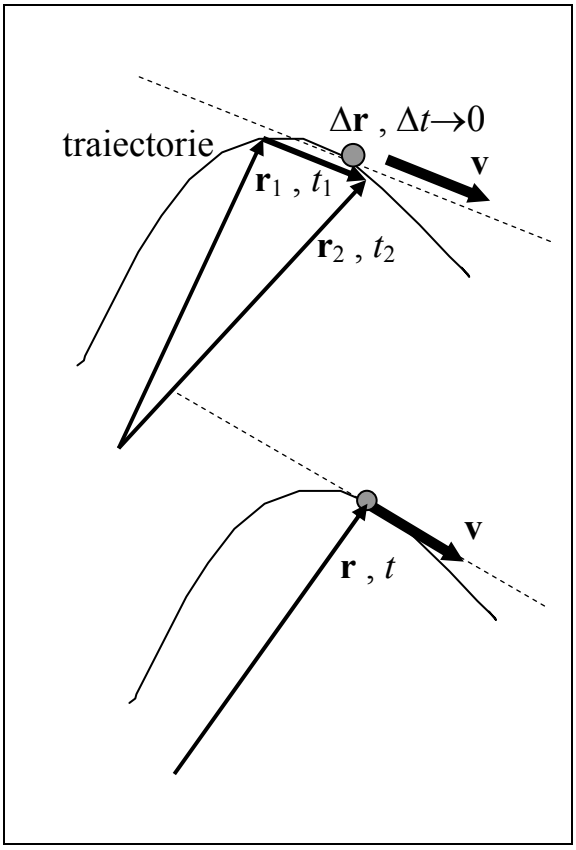
PRECIZAREA DE LA PAGINA 17

S-ar putea să fie necesar să argumentez afirmația : „*Viteza medie nu poate caracteriza starea de mişcare a unui obiect*”. Nimic mai simplu ! Faptul că viteza medie a expresului era de 69 km/h, nu poate oferi şi informația că el a staționat 10 minute în gara din Braşov !

*Care este **asemănarea** dintre viteza medie şi viteza momentană* ? Este una singură : **formula de calcul este aceeaşi**. *Care este atunci **deosebirea** dintre viteza medie şi viteza momentană* ? Din nou este una singură : **intervalul de timp luat în considerare trebuie să fie cât mai scurt**, astfel încât şirul de stări prin care trece corpul să fie cât mai mic (idealizat, să se reducă doar la stări extrem de apropiate de starea căreia i se atribuie viteza momentană).
Conform celor spuse, putem defini viteza momentană după cum urmează :

Viteza momentană este mărimea fizică vectorială calculată ca raportul dintre vectorul deplasare şi durata necesară deplasării, atunci când durata este foarte mică, adică este prima derivată a vectorului de poziție în raport cu timpul. Formula corespunzătoare este :

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{sau} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$$



În figură se poate observa semnificația geometrică a vectorului viteză. Fie starea marcată printr-un cerculeț, având vectorul de poziție **r**, la momentul de timp *t*. Pentru a determina viteza, considerăm două momente de timp $t_1 < t$, $t_2 > t$, foarte apropiate de momentul *t*. Trasăm vectorii de poziție la aceste două momente de timp şi facem diferența $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Înmulțim vectorul $\Delta\mathbf{r}$ cu scalarul $1/(t_2 - t_1)$, găsind astfel vectorul **v**.

Vectorul viteză este tangent la traiectorie.

Ca orice alt vector, vectorul viteză are trei componente :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad ; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad ; \quad v_z = \frac{dz}{\Delta t} = \dot{z}$$

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 18

În diagrama de la pagina 17 sunt prezentate vitezele medii pentru trei trenuri, în funcție de şapte tronsoane de drum care sunt menționate la pagina 16. Vitezele medii prezintă un minim pe tronsonul 4, Predeal-Braşov. Întrebarea este : oare de ce ?

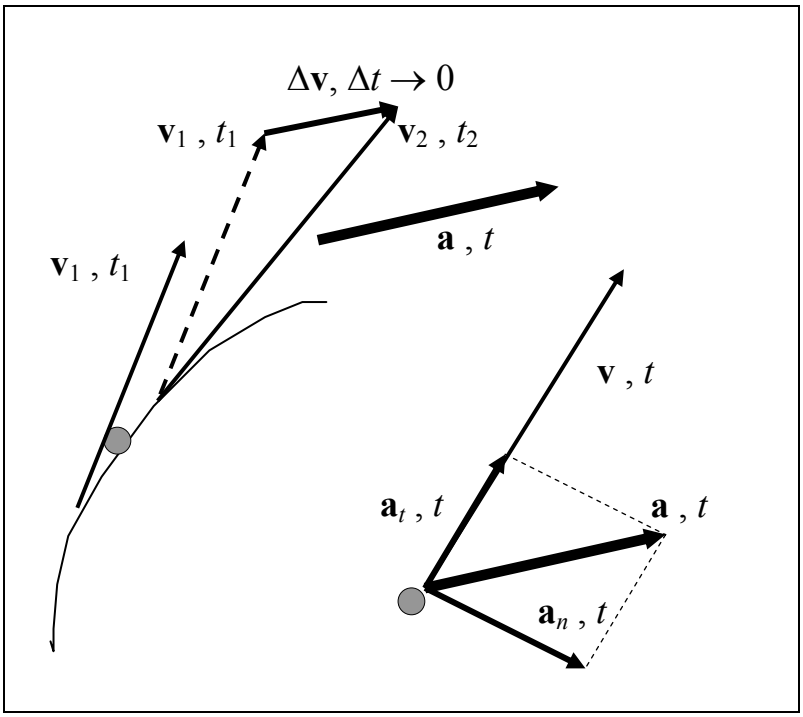
Viteza atribuită unui corp în mişcare se poate şi ea modifica în timp. *Cum măsurăm cât de repede variază aceasta* ? Este nevoie de o nouă mărime fizică, denumită **accelerație momentană**, sau pur şi simplu **accelerație**.

Prin definiție : **accelerația momentană** este mărimea fizică vectorială calculată ca prima derivată a vectorului viteză în raport cu timpul, sau a doua derivată a vectorului de poziție în raport cu timpul. Formula corespunzătoare este :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad \text{sau} \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

Vectorul accelerație are, în general, trei componente:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \quad ; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$



Similar cu vectorul viteză, se poate construi geometric vectorul accelerație (vezi figura alăturată).

În general, vectorul accelerație este orientat sub un anumit unghi în raport cu vectorul viteză, iar cei doi vectori formează un plan.

Alegând în acest plan două axe de coordonate perpendiculare, una dintre ele fiind îndreptată în sensul vitezei, există două componente ale accelerației : **accelerația tangențială**, orientată paralel cu vectorul viteză, şi **accelerația normală**, orientată perpendicular pe vectorul viteză. Evident, **vectorul accelerație nu are şi o componentă perpendiculară pe acest plan**.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 19

Pentru că accelerația este o mărime fizică definită cu ajutorul altor mărimi fizice (viteză şi durata, sau distanță şi durată), unitatea sa de măsură este definită, la rândul ei, în funcție de unitățile de măsură ale acestor mărimi fizice. Astfel :

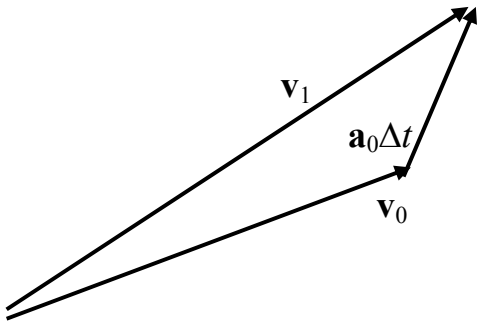
$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} \quad \Rightarrow \quad [a]_{SI} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Din cele discutate până acum reiese faptul că starea momentană a unui corp în mişcare este caracterizată de trei mărimi fizice vectoriale : vectorul de poziţie **r**, viteza **v** şi acceleraţia **a**, la care se adaugă momentul de timp *t*. Valorile şi orientările celor trei mărimi vectoriale se pot modifica în timp.

Funcţiile matematice care permit aflarea poziţiei, vitezei sau acceleraţiei la un moment de timp dat se numesc **legi de mişcare** sau **ecuaţii de mişcare** (legea/ecuaţia spaţiului, legea/ecuaţia vitezei, sau legea/ecuaţia acceleraţiei).

În principiu, dacă cunoaştem ecuaţia acceleraţiei, poziţia şi viteza iniţială ale unui mobil, putem să determinăm atât ecuaţia vitezei, cât şi ecuaţia spaţiului.

Cu alte cuvinte, *dacă ştim locul unde se află mobilul şi ce viteză are la un moment iniţial, precum şi acceleraţia sa la toate momentele de timp, putem afla viteza şi poziţia mobilului la orice moment de timp*.

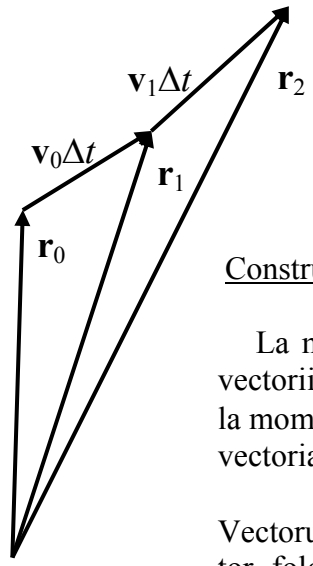


Construcţia geometrică a vitezei

La momentul iniţial t_0 se cunosc vectorii $\mathbf{v}_0$ şi $\mathbf{a}_0$. Viteza la momentul $t_0 + \Delta t$ este dată de suma vectorială :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0\,\Delta t$$

Viteza $\mathbf{v}_2$ se calculează asemănător, folosind acceleraţia $\mathbf{a}_1$ de la momentul $t_0 + \Delta t$ şi viteza $\mathbf{v}_1$. Iteraţiile pot continua până la determinarea vectorului **v**, la momentul *t*.



Construcţia geometrică a vectorului de poziţie

La momentul iniţial t_0 se cunosc vectorii $\mathbf{r}_0$ şi $\mathbf{v}_0$. Vectorul de poziţie la momentul $t_0 + \Delta t$ este dat de suma vectorială :

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\,\Delta t$$

Vectorul $\mathbf{r}_2$ se calculează asemănător, folosind viteza $\mathbf{v}_1$ de la momentul $t_0 + \Delta t$ şi vectorul de poziţie $\mathbf{r}_1$. Iteraţiile pot continua până la determinarea vectorului **r**, la momentul *t*.

PROBLEMA DE LA PAGINA 20

Consideraţi două cazuri :

a) Acceleraţia şi viteza sunt mereu paralele
b) Acceleraţia şi viteza sunt mereu perpendiculare

În ambele cazuri modulul acceleraţiei este constant, iar mobilul se află iniţial în originea axelor de coordonate. Construiţi geometric succesiunea de puncte prin care trece mobilul.

Construcțiile geometrice făcute pentru a determina vectorul viteză sau vectorul de poziție au un echivalent analitic : **operațiile de integrare**.

Cunoscând expresia analitică a accelerației ca funcție de timp, expresia vitezei se calculează cu integrala :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t)dt$$

Cunoscând expresia analitică a vitezei ca funcție de timp, expresia vectorului de poziție se calculează cu integrala :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t)dt$$

ÎN REZUMAT

Principalele mărimi cinematice care caracterizează deplasarea unui mobil sunt : **vectorul de poziție**, **vectorul viteză** şi **vectorul accelerație**.

Cunoscând expresia analitică a vectorului de poziția (adică legea spațiului), viteza şi accelerația se pot calcula prin derivare :

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad ; \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}$$

Cunoscând expresia analitică a accelerației (adică legea accelerației), viteza şi vectorul de poziția se pot calcula prin integrare :

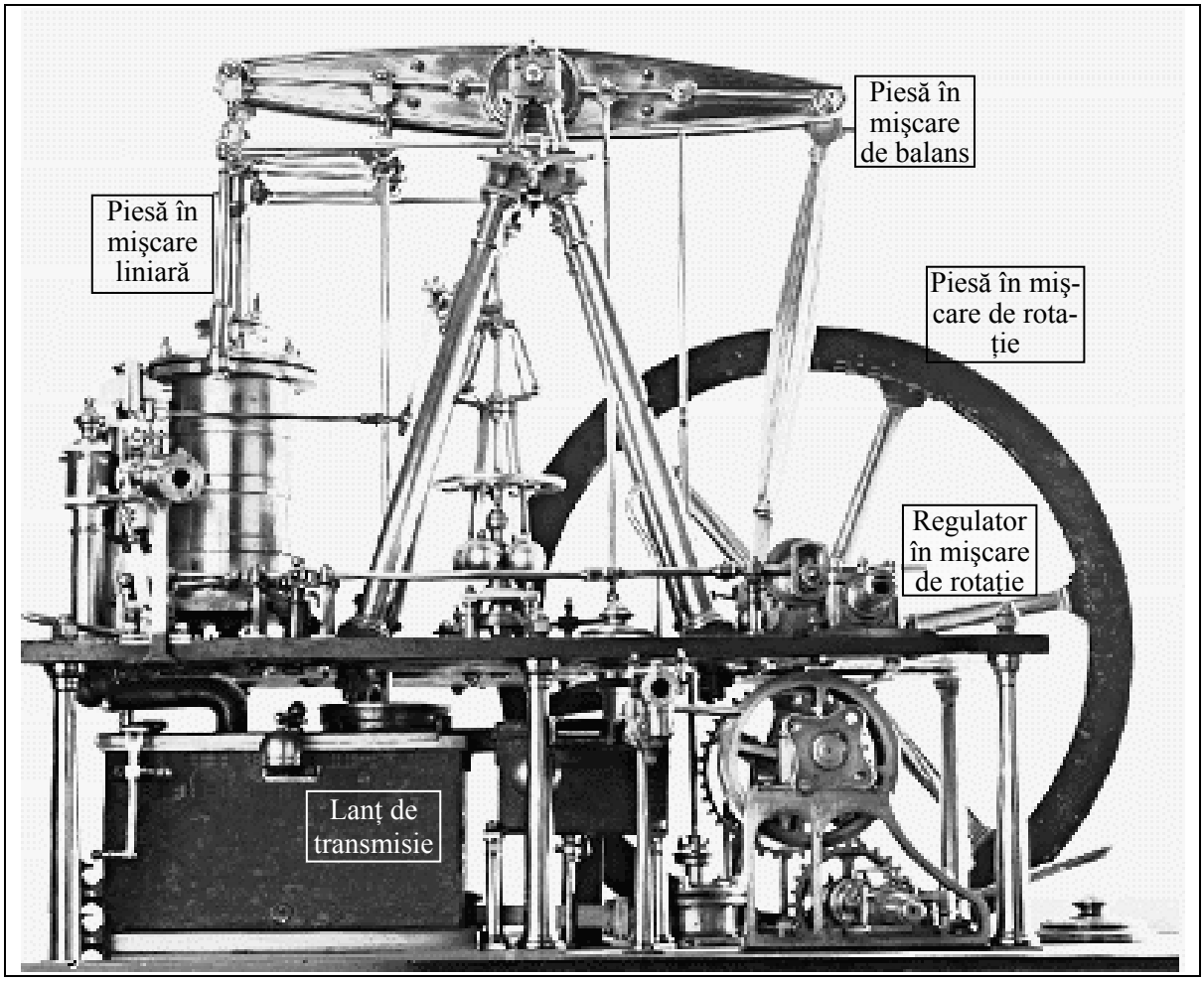
$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t)dt \quad ; \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t)dt$$

Ecuația traiectoriei se poate afla eliminând timpul între ecuațiile parametrice de mişcare.

PROBLEMA DE LA PAGINA 21

Expresia analitică a vectorului de poziție al unui mobil este : $\mathbf{r}(t) = r\cos\omega t\,\mathbf{e}_x + r\sin\omega t\,\mathbf{e}_y + r\,\mathbf{e}_z \quad ; \quad r, \omega \in \Re_+$. Calculați viteza şi accelerația mobilului. Găsiți ecuația traiectoriei şi reprezentați-o grafic într-un sistem de axe de coordonate.

1.4. CLASIFICAREA MIŞCĂRILOR DUPĂ TRAIECTORIE ŞI LEGEA DE MIŞCARE, PRINCIPALELE TIPURI DE MIŞCĂRI



În figură se poate vedea o maşină cu aburi din secolul al XIX-lea. Desigur, puteţi remarca complexitatea ei: piese care se rotesc, piese în mişcare liniară, piese care balansează, roţi dinţate, lanţ de transmisie… *Cum se poate oare construi ceva atât de complicat* ?

CUGETAREA DE LA PAGINA 22

Apropo de efectele imediate ale industrializării :

Sărăcia naşte ură ; cei în suferinţă urau maşinile care - credeau ei - le luaseră pâinea de la gură ; urau clădirile care adăposteau maşinile ; urau fabricanţii care posedau acele clădiri.

Charlotte Brontë (1816–1855), scriitoare britanică

„Taina” constă în cunoaşterea legilor după care se mişcă componentele sau părțile lor. Cunoscând aceste legi, este relativ simplu să anticipezi prin calcul cum va funcționa ansamblul pieselor, să le construiești şi să le asamblezi (*simplu* pentru inginerul a cărui meserie constă tocmai în aceasta !). În fond, aceste cunoştințe au stat la baza *Revoluției Industriale* din veacul al XIX-lea.

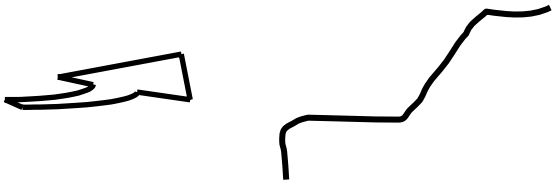
Veți spune : „*Bine, şi ce legătură are asta cu fizica* ?”. Legătura este tocmai capitolul de față.

Un prim demers al cinematicii este realizarea unei clasificări a mişcărilor.

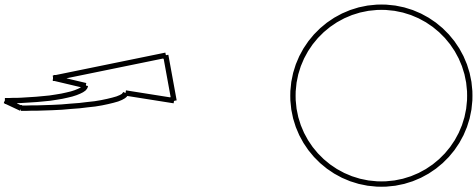
Clasificarea mişcărilor se poate face în două moduri :

- după forma traiectoriei
- după legea de mişcare pe traiectorie

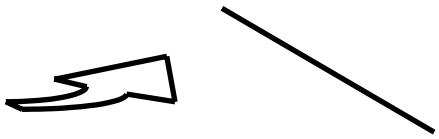
Cea mai generală formă de traiectorie este linia curbă.
Dacă traiectoria unui mobil este o curbă oarecare, spunem că mobilul are o **traiectorie curbilinie**



Dacă curba are forma particulară de cerc, spunem că mobilul are o **traiectorie circulară**



Dacă curba se reduce la o dreaptă, spunem că mobilul are o **traiectorie rectilinie**



Clasificarea mişcărilor după forma traiectoriei

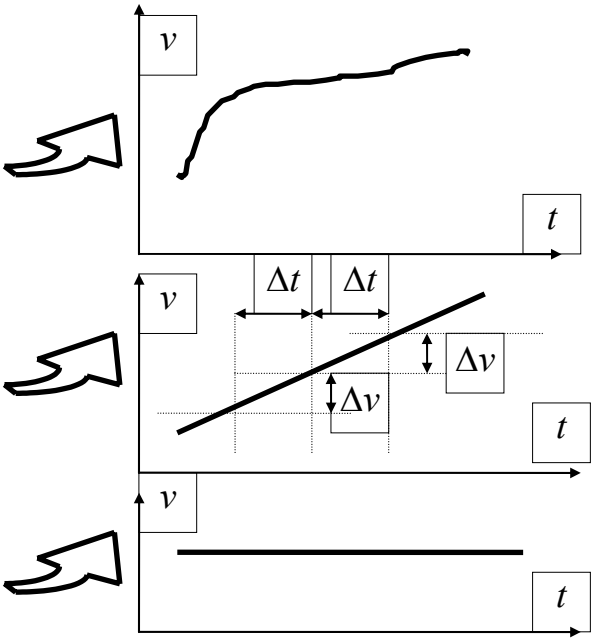
PRECIZAREA DE LA PAGINA 23

Deşi figura de pe această pagină v-ar putea sugera că traiectoriile curbilinii sunt plane, acest lucru nu este adevărat. Un exemplu de traiectorie ce nu este plană îl întâlnim în cazul mişcării elicoidale pe care o poate avea un purtător de sarcină electrică care se deplasează în câmp magnetic.

Cea mai generală mişcare este **mişcarea variată**.
Într-o mişcare variată modulul vitezei se modifică de la un moment de timp la altul.

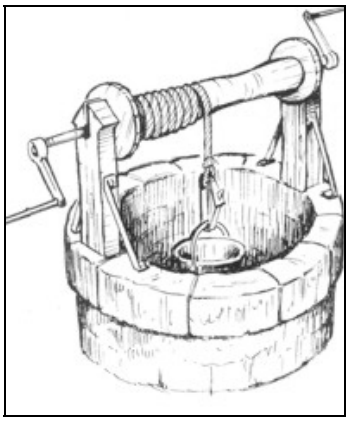
Mişcarea uniform variată este mişcarea în care modulul vitezei variază cu cantităţi egale în intervale de timp egale.

Mişcarea uniformă este mişcarea în care modulul vitezei este constant în timp.



Clasificarea mişcărilor după legea de mişcare

Când vorbim despre tipul de mişcare al unui corp trebuie să furnizăm ambele informaţii necesare : forma traiectoriei şi legea de mişcare. Există, astfel, *mişcări circulare uniforme*, *mişcări rectilinii uniform variate*, *mişcări curbilinii variate*, ş.a.m.d.



Deşi cele mai generale tipuri de traiectorii sunt cele curbilinii, iar cele mai generale tipuri de legi de mişcare corespund mişcărilor variate, totuşi, în practica inginerească predomină tipurile simple de mişcări, cum ar fi cele rectilinii sau circulare, respectiv uniforme şi uniform variate. De multe ori există nevoia de a converti un tip de mişcare în altul. Figura alăturată vă înfăţişează cum se poate transforma o mişcare de rotaţie într-o mişcare rectilinie cu ajutorul unui troliu.

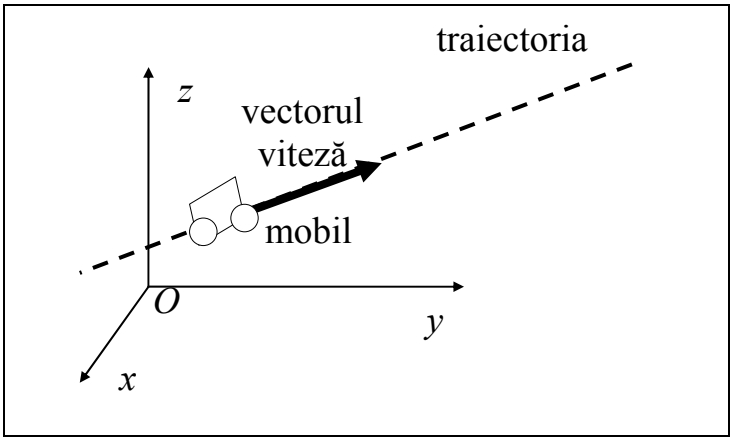
PROBLEMA DE LA PAGINA 24

Fântâna din imaginea de mai sus are 10 m adâncime. Diametrul butucului troliului este de 25 cm, iar raza manivelei este de 50 cm. Câte rotaţii sunt necesare pentru a scoate găleata la suprafaţă ?

Vom discuta în cele ce urmează principalele tipuri de mişcări mecanice.

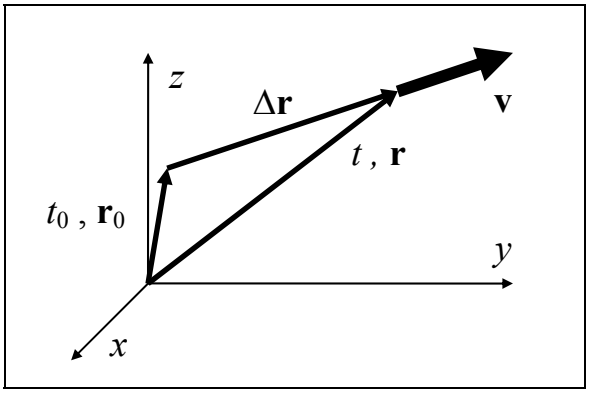
1.4.1. MIŞCAREA RECTILINIE UNIFORMĂ

Mişcarea rectilinie uniformă este mişcarea care se face în linie dreaptă, viteza având aceeaşi valoare în orice punct al traiectoriei (deci **vectorul viteză este constant în timp**).



După cum se vede în figura alăturată, traiectoria poate avea o direcţie oarecare în raport cu axele sistemului de referinţă.

Vectorul viteză este paralel cu direcţia traiectoriei.



În figura din dreapta sunt reprezentaţi vectorii de poziţie ai mobilului la două momente de timp : t_0 şi t. Conform definiţiei vitezei momentane, putem scrie :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Pentru că viteza este constantă prin definiţie determinarea legii de mişcare prin integrare este foarte simplă :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t)dt = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}\int_{t_0}^{t} dt = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0)$$

Ecuaţia spaţiului în mişcarea rectilinie uniformă

Ecuaţia spaţiului în mişcarea rectilinie uniformă este o ecuaţie vectorială, echivalentă cu trei ecuaţii scalare, câte una pentru fiecare axă de coordonate :

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 25

Un avion zboară de la Bucureşti la Beijing, în linie dreaptă, cu viteză constantă şi la altitudine constantă. Întrebarea este : mişcarea avionului este sau nu o mişcare rectilinie şi uniformă ?

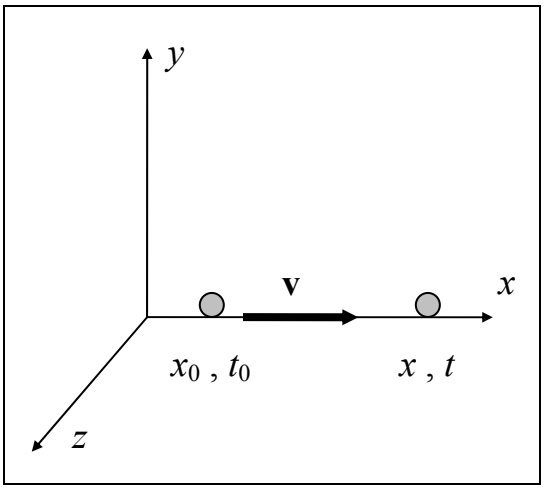
$$\begin{cases} x = x_0 + v_x(t - t_0) \\ y = y_0 + v_y(t - t_0) \\ z = z_0 + v_z(t - t_0) \end{cases}$$

În aceste ecuații :

❖ *x, y, z* reprezintă coordonatele punctului în care se află mobilul la momentul de timp *t*

❖ x_0, y_0 , z_0 reprezintă coordonatele punctului în care se află mobilul la momentul de timp t_0

❖ v_x , v_y , v_z sunt componentele vectorului viteză



Dacă nu este impusă o anumită orientare a axelor de coordonate, ele pot fi alese astfel încât vectorul viteză să fie paralel cu axa *Ox*. În acest caz traiectoria este paralelă cu axa *Ox*, iar componentele v_y şi v_z sunt nule. De asemenea, alegerea sistemului de coordonate se poate face astfel încât şi **coordonatele** y_0 şi z_0 **să fie nule** (vezi figura alăturată). În aceste condiții, din setul de trei ecuații ne rămâne una singură :

$$\boxed{x = x_0 + v(t - t_0)}$$

Trebuie remarcat că în această ecuație *v* reprezintă proiecția vectorului viteză pe axa *Ox*. Această proiecție este un număr pozitiv dacă viteza are sensul axei Ox. În caz contrar, proiecția vitezei este un număr negativ.

Fie mai multe momente de timp succesive : t_1 , t_2 , t_3 , …., t_{n-1} , t_n , astfel încât : $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \ldots = t_n - t_{n-1} = \tau$. Conform ecuației spațiului, putem scrie :

$$\left.\begin{aligned} x_{j-1} &= x_0 + v(t_{j-1} - t_0) \\ x_j &= x_0 + v(t_j - t_0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_j - x_{j-1} = v(t_j - t_{j-1}) = v\tau \quad \forall j \in \{0, n\}$$

Remarcăm că distanța parcursă în oricare dintre intervalele de timp considerate este aceeaşi. Rezultă că **în mişcarea rectilinie uniformă mobilul parcurge distanțe egale în intervale de timp egale**.

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 26

Fie două mobile care în intervale de timp egale parcurg distanțe ce se află mereu în raport de 1/3. Întrebarea este : puteți afirma cu siguranță că mobilele în discuție efectuează mişcări rectilinii şi uniforme ?

Accelerația momentană este definită astfel :

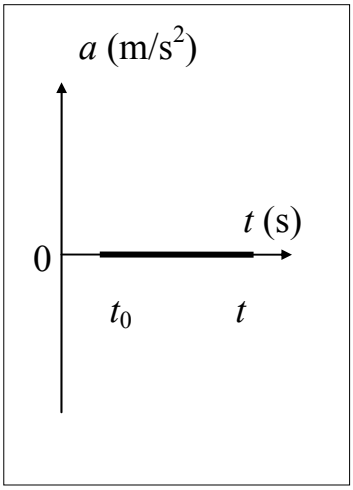
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Cum vectorul viteză este constant, rezultă :

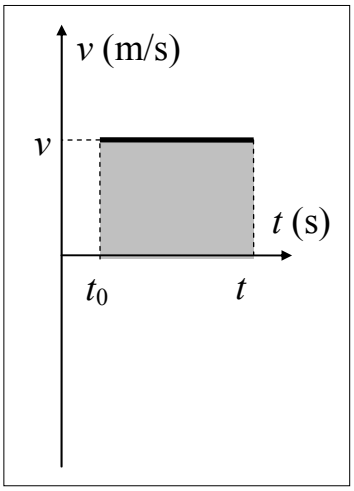
$$a = 0$$

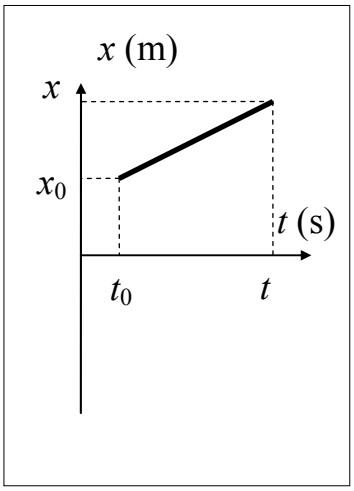
În mişcarea rectilinie uniformă accelerația mobilului este nulă.

Poziția mobilului, viteza şi accelerația sunt funcții de timp. Ele pot fi reprezentate grafic în două cazuri.

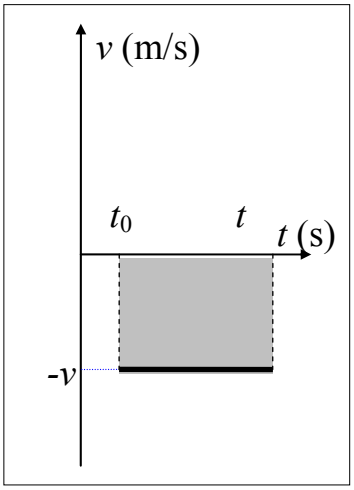


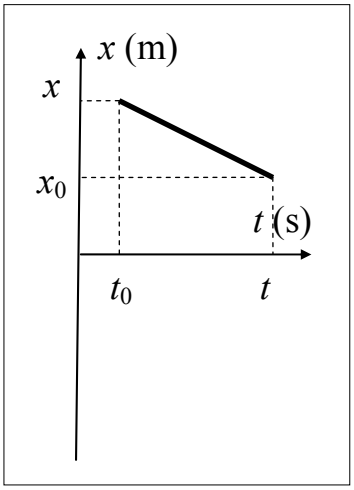
Vectorul viteză are acelaşi sens ca şi axa *Ox*





Vectorul viteză are sens opus axei *Ox*





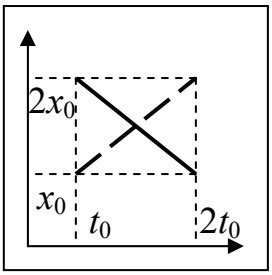
Indiferent de sensul vitezei accelerația este nulă.

Dacă vectorul viteză este orientat în sensul pozitiv al axei *Ox*, valoarea sa numerică este pozitivă, iar în caz contrar este negativă.

Dacă vectorul viteză este orientat în sensul pozitiv al axei *Ox*, valoarea coordonatei *x* creşte în timp, iar în caz contrar scade.

Aria cuprinsă între axa timpului şi graficul vitezei, limitată de momentele de timp t_0 şi t, este numeric egală cu distanța parcursă de mobil.

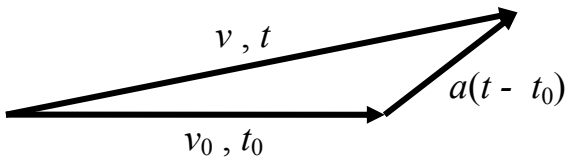
PROBLEMA DE LA PAGINA 27



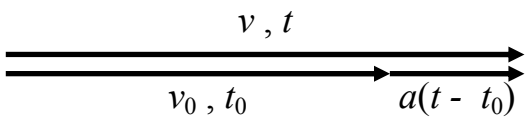
Graficul alăturat reprezintă variația poziției a două mobile în funcție de timp. Determinați unde şi când se întâlnesc cele două mobile.

1.4.2. MIŞCAREA RECTILINIE UNIFORM VARIATĂ

Mişcarea rectilinie uniform variată este mişcarea care se desfăşoară în linie dreaptă şi în care modulul vitezei variază cu cantităţi egale în intervale de timp egale.



a) În acest caz vectorul viteză variază ca orientare



b) Pentru ca vectorul viteză să nu varieze ca orientare, este necesar ca vectorul accelerație să fie paralel cu vectorul viteză

Să ne amintim că **vectorul viteză este permanent tangent la traiectorie**. Rezultă că atunci când traiectoria este rectilinie, vectorul viteză nu variază ca orientare.

Din definiția accelerației momentane :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

putem afla viteza la momentul t :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}\, dt$$

sau :

$$\boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}(t - t_0)}$$

Ecuația vitezei în mişcarea uniform variată

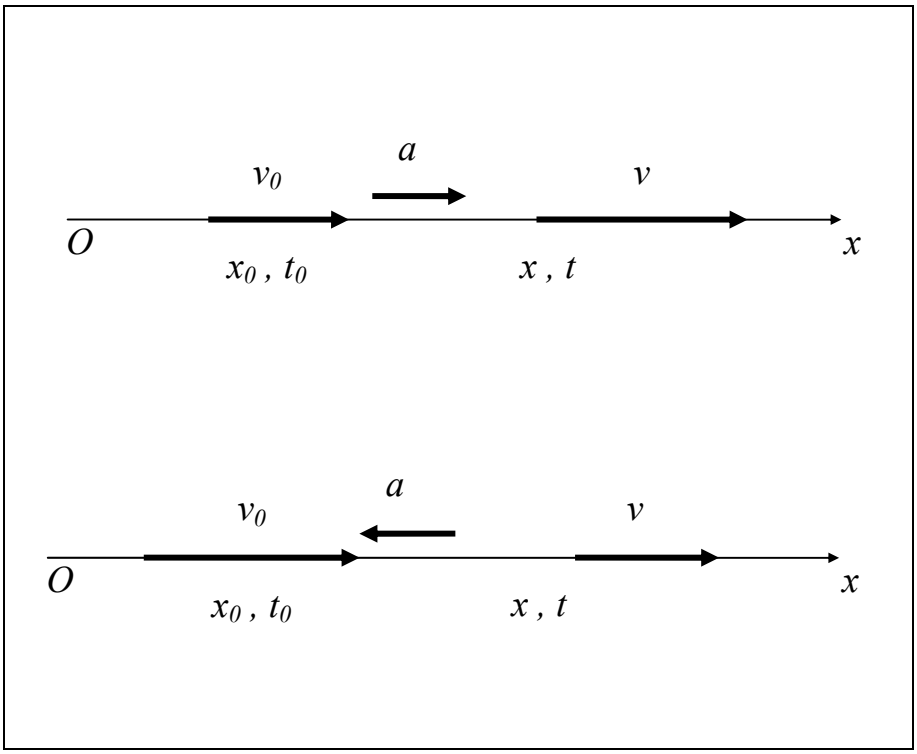
În figura de mai sus se poate vedea rezultatul acestei operații cu vectori. Se observă că dacă direcția accelerației nu coincide cu direcția vitezei, vectorul viteză variază ca orientare. Rezultă de aici că :

În mişcarea rectilinie uniform variată vectorul accelerație este permanent paralel cu vectorul viteză şi, implicit, cu direcția mişcării.

CUGETAREA DE LA PAGINA 28

Mişcarea fiind eternă, prima cauză a mişcării, dacă este doar una, trebuie să fie de asemenea eternă.

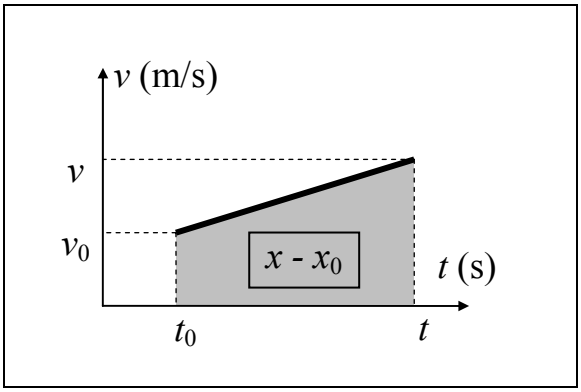
Aristotel (384 îC–322 îC), filosof grec, în cartea *Fizica*



Alegând sistemul de referință astfel încât traiectoria să se suprapună peste axa *Ox*, obținem situația din figura alăturată. Se observă că vectorul accelerație poate avea acelaşi sens ca şi vectorul viteză, dar şi sens opus. Ecuația vectorială scrisă anterior se reduce în cazul acesta la o singură ecuație scalară, referitoare la componentele vectorilor pe axa *Ox*:

$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

(nu uitați că valorile numerice ale mărimilor din ecuație sunt pozitive dacă sensul vectorului corespunzător coincide cu sensul axei, respectiv negative în caz contrar !).



În figura alăturată se poate vedea graficul vitezei în funcție de timp. Ca şi în cazul mişcării rectilinii uniforme, **aria cuprinsă între axa timpului şi graficul vitezei, limitată de momentele** t **şi** t_0, **este numeric egală cu distanța parcursă de mobil** : $x - x_0$. Se ştie că aria cuprinsă între graficul unei funcții şi abscisă este o reprezentare geometrică a integralei funcției respective :

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} a\,dt = \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt = v_0 t\Big|_{t_0}^{t} + \frac{at^2}{2}\Bigg|_{t_0}^{t} - at_0 t\Big|_{t_0}^{t}$$

sau :

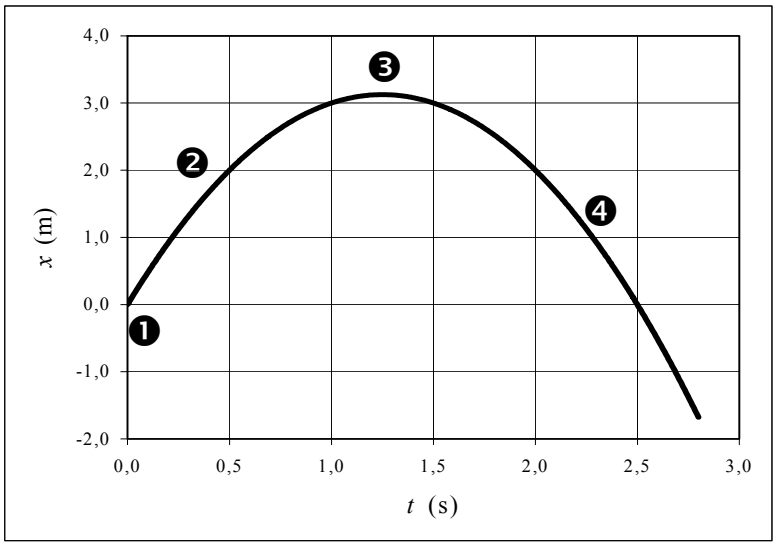
$$\boxed{x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}}$$

Ecuația spațiului în mişcarea rectilinie uniform variată

PROBLEMA DE LA PAGINA 29

Între intervalele de timp t_0 şi t, un mobil aflat în mişcare rectilinie uniform variată îşi modifică viteza de la valoarea v_0 la valoarea v. Ce viteză medie i se poate atribui mobilului în acest interval de timp ?

Această ecuație permite calcularea coordonatei x a punctului în care se află mobilul la momentul de timp t, cunoscând poziția sa inițială x_0 şi viteza sa inițială v_0 (la momentul t_0), precum şi accelerația mişcării a.



Un exemplu de mişcare rectilinie uniform variată

1) Starea inițială
$t_0 = 0$, $x_0 = 0$
$v_0 = 5$ m/s

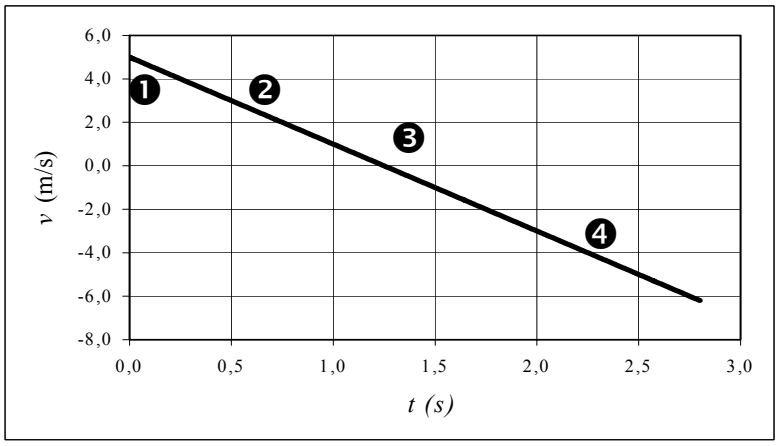
2) Mobilul se depărtează de origine, iar viteza scade.

3) Mobilul a ajuns la distanța maximă față de origine. În acest moment viteza sa este nulă.

4) Viteza îşi schimbă sensul, iar mobilul se apropie de origine. Modulul vitezei creşte.

Ecuația mişcării :

$$x = 5\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 4\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$$



Un exemplu de mişcare rectilinie uniform variată

1) Starea inițială
$t_0 = 0$, $v_0 = 5$ m/s

2) Viteza este pozitivă şi scade.

3) Mobilul este momentan în repaus.

4) Viteza este negativă şi creşte în modul.

Ecuația vitezei : $v = 5\frac{\text{m}}{\text{s}} - 4\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t$

PROBLEMA DE LA PAGINA 30

La pagina 7 se află o fotografie care înfățişează traiectoria pe care o urmează o minge de baschet. Examinând fotografia şi utilizând o riglă, determinați tipurile de mişcare ale proiecțiilor centrului mingii pe axele de coordonate.

O altă ecuație importantă a mişcării uniform variate se poate obține eliminând termenul (t - t_0) între ecuația vitezei şi ecuația spațiului :

$$v = v_0 + a(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad (t - t_0) = \frac{v - v_0}{a}$$

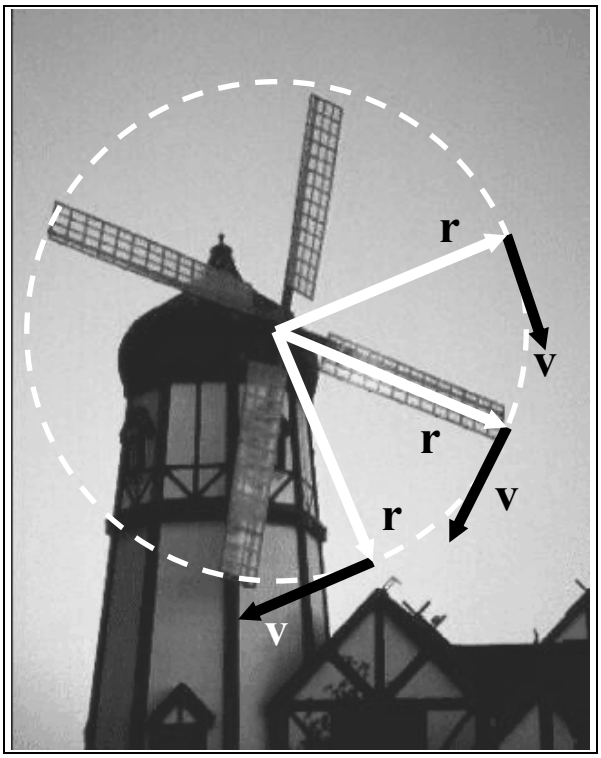
$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0) \quad \Leftrightarrow \quad x = x_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

sau :

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Această relație se numeşte **ecuația lui Galilei**. Ea permite calcularea vitezei v dacă se cunosc viteza inițială v_0, accelerația a şi distanța parcursă de mobil de la începutul mişcării: (x - x_0).

1.4.3. MIŞCAREA CIRCULARĂ UNIFORMĂ

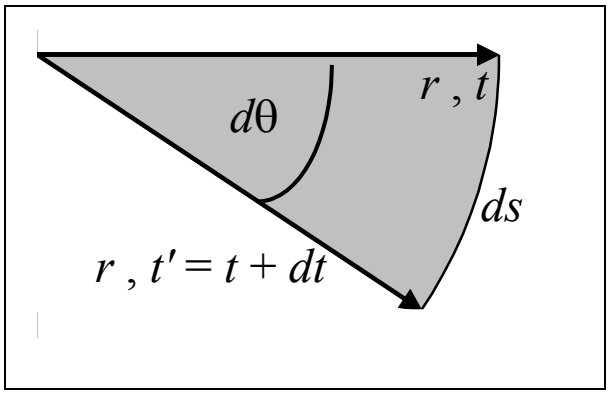


Mişcarea circulară uniformă este mişcarea care se desfăşoară pe un cerc şi în care modulul vitezei este constant.

Pentru că modulul vitezei este constant, **mobilul aflat în mişcare circulară uniformă parcurge arce de cerc egale în intervale de timp egale**. Față de centrul cercului, un arc de cerc este delimitat de două vectori de poziție, care formează un anumit unghi între ei. Din aceea că arcele de cerc parcurse în intervale de timp egale sunt egale, rezultă că şi **unghiurile la centru măturate de raza vectoare în intervale de timp egale au valori egale**.

PROBLEMA DE LA PAGINA 31

Luând în ecuația lui Galilei $v = v_0$, rezultă : $a(x - x_0) = 0$. În afara cazului banal $a = 0$, ce alte semnificații puteți atribui acestei situații ?



Să considerăm un mic interval de timp Δt. În figura alăturată se poate vedea că în acest interval de timp mobilul parcurge pe traiectorie o distanță Δs, iar raza vectoare mătură un unghi la centru $\Delta\theta$. Conform definiției vitezei :

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Ştim că lungimea arcului de cerc este proporțională cu unghiul la centru exprimat în radiani :

$$ds = r\, d\theta$$

unde r este raza cercului. Înlocuind în formula de definiție a vitezei, obținem :

$$v = r\frac{d\theta}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r}$$

Observăm că raportul v/r este constant în timp. Rezultă că şi raportul $d\theta/dt$ este constant în timp.

Ce semnificație are acest raport ? Luând dt egal cu unitatea de măsură a timpului, $d\theta$ reprezintă unghiul la centru măturat de raza vectoare în unitatea de timp. Concluzia este că :

Într-o mişcare circulară uniformă unghiul la centru măturat în unitatea de timp de raza vectoare are o valoare constantă pe toată durata mişcării. **Acest raport constant poate fi luat ca o măsură a mişcării circulare uniforme**, primind denumirea de **viteză unghiulară** :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Putem reformula legea de mişcare astfel : **într-o mişcare circulară uniformă viteza unghiulară este constantă în timp**. Relația dintre viteza cu care se deplasează mobilul pe cerc (numită şi **viteză liniară**) şi viteza unghiulară este următoarea :

$$v = \omega r$$

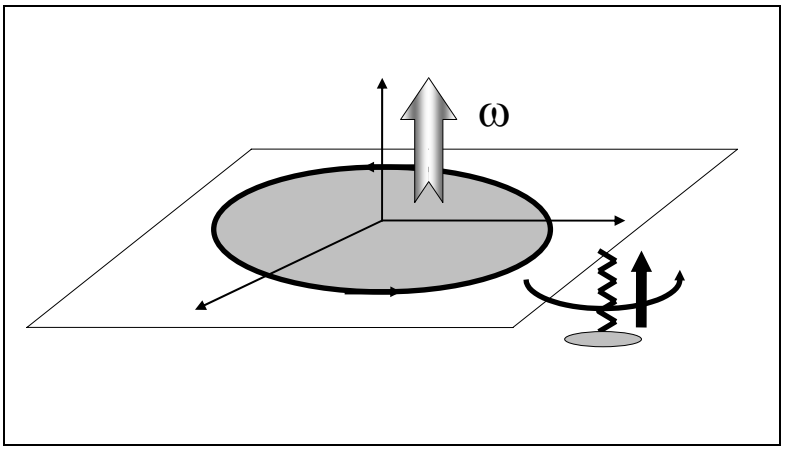
INFORMAȚIA DE LA PAGINA 32

Pentru că viteza unghiulară este o mărime fizică definită cu ajutorul unghiului la centru şi duratei, unitatea sa de măsură este definită, la rândul ei, în funcție de unitățile de măsură ale acestor mărimi fizice. Astfel :

$$[\omega] = \frac{[\Delta\theta]}{[\Delta t]} \quad \Rightarrow \quad [\omega]_{SI} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Observăm că **viteza liniară este proporțională atât cu viteza unghiulară, cât şi cu lungimea razei traiectoriei**. O caracteristică a acestei relații este aceea că ea depinde de modulele a două mărimi vectoriale: raza vectoare şi viteza. *Oare ce operație matematică cu vectori ar corespunde acestei relații între module* ?

Prima supoziție ar fi aceea că viteza unghiulară este o mărime scalară şi că : $\mathbf{v} = \omega\mathbf{r}$. Consecința ar fi că vectorii viteză şi rază vectoare ar trebui să fie orientați pe direcții paralele, ceea ce este fals pentru că viteza şi raza vectoare sunt perpendiculare). Rezultă de aici că **viteza unghiulară trebuie să fie o mărime vectorială** ! Veți întreba : *dar* **ce informație suplimentară, legată de direcție şi sens***, poate purta viteza unghiulară* ?



Dacă priviți figura alăturată puteți observa că există două informații importante :

❖ în ce plan se desfăşoară mişcarea circulară uniformă

❖ care este sensul de rotație pe traiectorie

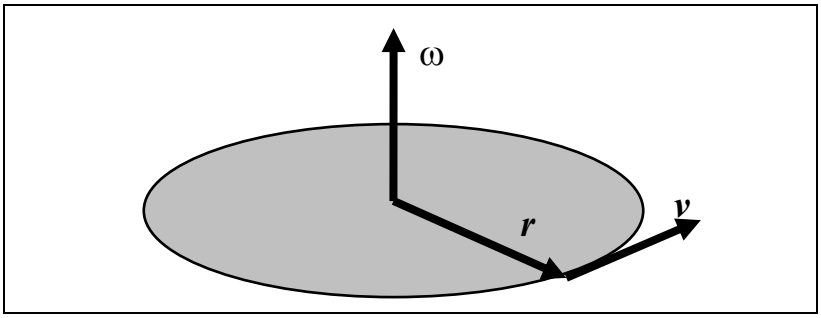
Pentru ca vectorul viteză unghiulară să cuprindă aceste informații se utilizează următoarele convenții :

❖ direcția vectorului este perpendiculară pe planul traiectoriei

❖ sensul vectorului este acelaşi cu sensul în care înaintează un burghiu drept, aşezat perpendicular pe planul traiectoriei, atunci când este rotit în acelaşi sens cu sensul în care se desfăşoară mişcarea circulară

✍ Deci relația între vectorii viteză unghiulară, viteză liniară şi rază vectoare poate fi scrisă ca un produs vectorial :

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}$$



Orientarea vectorilor este cea din figura alăturată. Observăm că **ei formează un triedru drept, fiind perpendiculari doi câte doi**.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 33

Dublul produs vectorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ are drept rezultat expresia : $\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. Prin urmare :

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})$$

Deoarece **ω** este perpendicular pe **r** rezultă că **ω·r** = 0 şi :

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\omega^2 \mathbf{r}$$

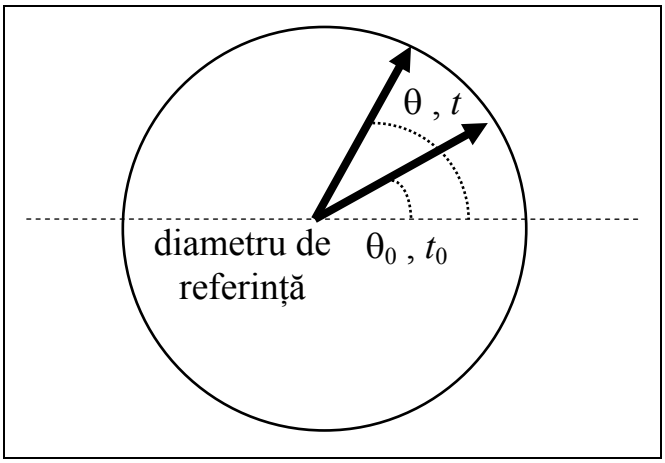
Viteza unghiulară este constantă în timp. De aceea putem scrie :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \omega\, dt \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 + \omega \int_{t_0}^{t} dt$$

sau :

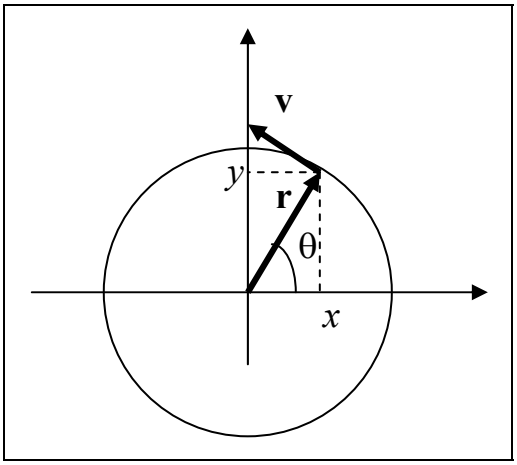
$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)}$$

Legea spațiului în mişcarea circulară uniformă



Această ecuație permite calcularea unghiului la centru pe care îl face raza vectoare cu diametrul de referință (vezi figura alăturată), la momentul de timp t, cunoscând viteza unghiulară şi unghiul la centru la momentul de timp inițial t_0.

În mişcarea uniformă modulul vitezei liniare este constant, dar vectorul viteză îşi schimbă în permanență orientarea. Rezultă de aici că **vectorul viteză variază în timp**. Cu alte cuvinte, **mişcarea uniform variată este o mişcare accelerată**.



Am reprezentat în figura alăturată poziția unui mobil care se roteşte pe un cerc de rază r, la un moment de timp oarecare t. Vectorul de poziție $\mathbf{r}$ se poate exprima în funcție de proiecțiile sale pe axele de coordonate şi de versorii acestora :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$$

La rândul lor, cele două proiecții pot fi exprimate cu ajutorul unghiului la centru θ şi al modulului razei vectoare r :

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta$$

Rezultă :

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\, \mathbf{e}_x + r\sin\theta\, \mathbf{e}_y$$

PROBLEMA DE LA PAGINA 34

Demonstrați că vectorul $\boldsymbol{\omega}$ este constant în timp.

Viteza este prima derivată a vectorului de poziție în raport cu timpul, rezultând :

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\left(r\cos\theta\,\mathbf{e}_x+r\sin\theta\,\mathbf{e}_y\right)}{dt}=-r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_x+r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_y$$

sau :

$$\mathbf{v}=-\omega r\sin\theta\,\mathbf{e}_x+\omega r\cos\theta\,\mathbf{e}_y$$

Accelerația este prima derivată a vectorului viteză în raport cu timpul, rezultând :

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d\left(-\omega r\sin\theta\,\mathbf{e}_x+\omega r\cos\theta\,\mathbf{e}_y\right)}{dt}=-\omega r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_x-\omega r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_y$$

sau :

$$\boxed{\mathbf{a}=-\omega^2 r\cos\theta\,\mathbf{e}_x-\omega^2 r\sin\theta\,\mathbf{e}_y=-\omega^2\left(r\cos\theta\,\mathbf{e}_x+r\sin\theta\,\mathbf{e}_y\right)=-\omega^2\mathbf{r}}$$

Accelerația este proporțională cu pătratul vitezei unghiulare şi cu modulul razei vectoare. Vectorul accelerație momentană are direcția razei vectoare momentane, iar sensul ei este opus sensului vectorului de poziție.

Rezultă că vectorul accelerație este îndreptat către centrul traiectoriei şi este de asemenea perpendicular pe vectorul viteză. Din aceste motive, accelerația mişcării circulare uniforme se numeşte **accelerație centripetă** sau **accelerație normală**.

O caracteristică importantă a mişcării circulare uniforme este faptul că traiectoria este o curbă închisă. De aici decurge repetarea în timp a pozițiilor prin care trece mobilul. Spunem din acest motiv că mişcarea circulară uniformă este o **mişcare periodică**.

Perioada reprezintă intervalul de timp după care mişcarea se repetă identic. Într-o perioadă mobilul parcurge întreaga circumferință a traiectoriei. Cum viteza unghiulară este constantă, putem scrie :

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}}$$

Perioada se măsoară în Sistemul Internațional în secunde.

CONCLUZIA DE LA PAGINA 35

Dacă comparați expresia accelerației normale, obținută pe această pagină, cu rezultatul calculului din cadrul *Informației de la pagina 33*, veți trage următoarea concluzie :

$$\mathbf{a}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)$$

O altă mărime care reflectă caracterul repetabil al mişcării circulare uniforme este **frecvența**. Prin definiție, frecvența reprezintă numărul de rotații complete efectuate în unitatea de timp. Evident, **frecvența arată de câte ori se cuprinde perioada mişcării în unitatea de timp** :

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Unitatea de măsură a frecvenței în Sistemul Internațional se numeşte **rotații pe secundă**.

1.4.4. MIŞCAREA OSCILATORIE ARMONICĂ

Mişcarea oscilatorie armonică este mişcarea a cărei ecuație este de forma : $x = A\,sin(\omega t + \varphi)$ sau $x = A\,cos(\omega t + \varphi)$. Parametrii care intervin în expresie au următoarele semnificații: x – **elongația oscilației**, A – **amplitudinea oscilației**, ω - **pulsația oscilației**, φ - **faza inițială a oscilației**, $\Phi = \omega t + \varphi$ - **faza oscilației**, t – **momentul de timp**.

Mişcările oscilatorii armonice sunt periodice.

Perioada de oscilație este intervalul de timp după care oscilația se repetă identic.

Conform definiției perioadei de oscilație, elongația unei oscilații periodice trebuie să ia aceleaşi valori după trecerea unor intervale de timp egale cu câte o perioadă. Astfel, pentru o oscilație armonică :

PROBLEMA DE LA PAGINA 36

Multe din ceasurile cu pendul au lungimea acestuia de circa 1 m, ceea ce le permite să efectueze o oscilație completă în două secunde. Presupunând că acesta este şi cazul ceasului din fotografie şi că lungimea arcului de cerc pe care se deplasează extremitatea pendulului este de 20 cm, calculați durata dintr-o perioadă în care extremitatea pendulului se află într-un interval de ±5 cm în jurul poziției de echilibru.

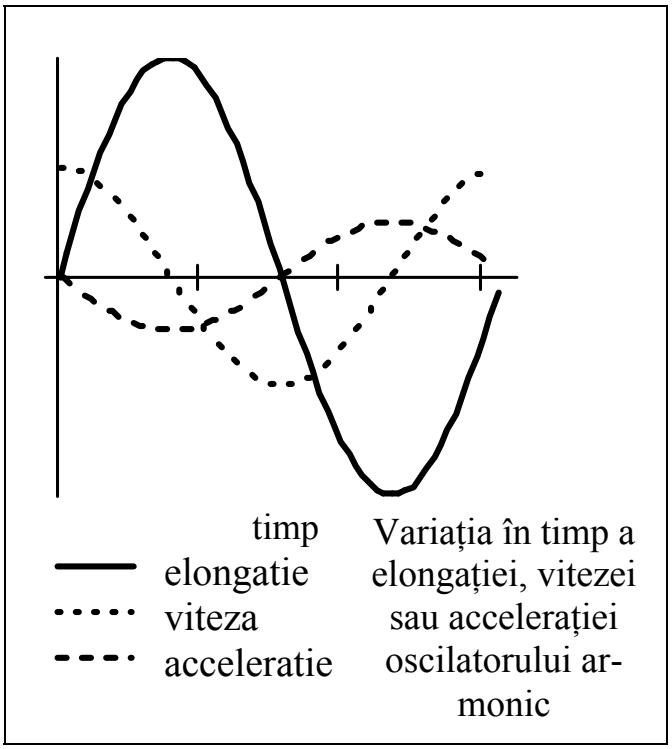
$$x(t+T)=x(t) \quad \forall t$$

sau :

$$A\,sin[\omega(t+T)+\varphi]=A\,sin(\omega t+\varphi)$$

De aici obținem :

$$A\,sin[\omega(t+T)+\varphi]-A\,sin(\omega t+\varphi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2A\,sin\frac{\omega T}{2}sin\left(\omega t+\varphi+\frac{\omega T}{2}\right)=0$$



Această egalitate este adevărată pentru orice moment de timp t doar dacă :

$$\frac{\omega T}{2}=k\pi \quad , \quad k\in\aleph$$

sau :

$$T=k\frac{2\pi}{\omega}$$

Evident, intervalul de timp minim corespunde valorii întregi $k = 1$, astfel încât perioada oscilatorului armonic are expresia :

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega}$$

Inversul perioadei de oscilație se numeşte frecvență. Rezultă :

$$\nu_0=\frac{1}{T_0}=\frac{\omega}{2\pi}$$

Când elongația oscilatorului armonic reprezintă distanța la care se află oscilatorul față de poziția de echilibru, prima derivată a elongației în raport cu timpul are semnificația de viteză, iar a doua derivată pe aceea de accelerație :

$$x=A\,sin(\omega t+\varphi) \quad \Rightarrow \quad v=\frac{dx}{dt}=\dot{x}=\omega A\,cos(\omega t+\varphi)$$

$$x=A\,sin(\omega t+\varphi) \quad \Rightarrow \quad a=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\ddot{x}=-\omega^2 A\,sin(\omega t+\varphi)$$

Examinând aceste relații, observăm că :

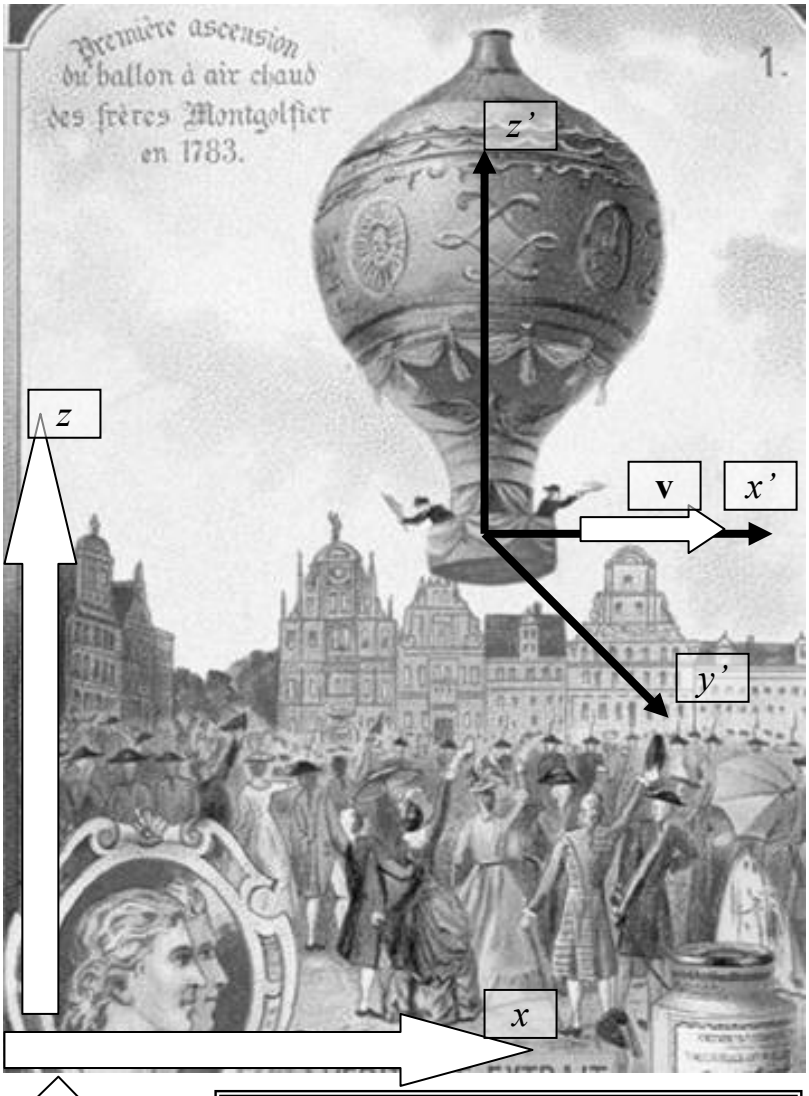
$$\boxed{a=-\omega^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}+\omega^2 x=0}$$

Ecuația diferențială a oscilatorului armonic

PROBLEMA DE LA PAGINA 37

Este $x=3\cos\omega t+6\sin\omega t+8\sin\left(\frac{\omega t}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\omega t}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$ o oscilație armonică sau nu ?

1.5. TRANSFORMAREA COORDONATELOR



Primul balon cu aer cald al fraților Montgolfier, 1783

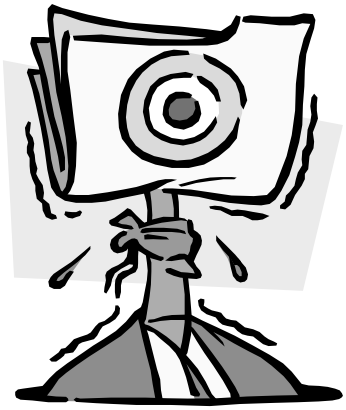
Un desen de epocă ne înfățișează primul zbor cu un balon cu aer cald, efectuat având oameni la bord. Mi-am permis să adaug desenului original și două sisteme de axe de coordonate, unul legat de pământ și celălalt atașat balonului. Am ales axele de coordonate în așa fel încât direcțiile lor să fie paralele, iar viteza balonului (constantă) să fie orientată în lungul axei *Ox*. *Viteza balonului* ? Scuzați-mă, am uitat să precizez : viteza balonului *față de pământ*, adică, mai precis, viteza deplasării pe axa *Ox*. Evident, viteza balonului în raport cu el însuși este nulă, dar, în schimb, față de aeronauți, toată piața din imagine se deplasează, rămânând în urmă.

Diferența între cetățenii din piață și aeronauți este aceea că dacă primii sunt siguri de imobilitatea clădirilor, ceilalți ar putea avea dubii !

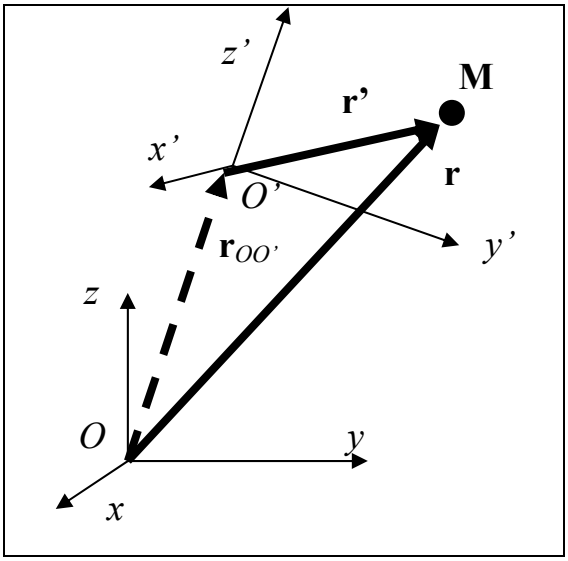
INFORMAȚIA DE LA PAGINA 38

Primul zbor cu oameni la bord al unui balon cu aer cald s-a făcut la 21 noiembrie 1783, la Paris. Pasagerii erau Pilatre de Rozier și François Laurent, marchiz d'Arlandes. Zborul deasupra Parisului a durat 25 de minute, timp în care s-au străbătut 9 kilometri.

Cel mai rău lucru care li s-ar fi putut întâmpla aeronauților era să fie prinşi într-o tornadă, aşa cum am încercat să sugerez în imaginea alăturată (pe care, mărturisesc n-am trucat-o prea bine). Mişcarea lor față de pământ n-ar mai fi fost o simplă translație lină, ci o mişcare accelerată, în care totul s-ar fi rotit în jur (în afară, bineînțeles, de sistemul lor de referință : balonul).



SUBIECTUL ACESTEI LECȚII ESTE STABILIREA RELAȚIILOR DE CORESPONDENȚĂ ÎNTRE POZIȚIILE, VITEZELE ŞI ACCELERAȚIILE UNUI MOBIL, AŞA CUM SUNT MĂSURATE ELE DE DOI OBSERVATORI AFLAȚI ÎN SISTEME DE REFERINȚĂ DIFERITE, UNUL DINTRE ACESTEA FIIND ÎN TRANSLAȚIE ŞI ROTAȚIE FAȚĂ DE CELĂLALT.



Să presupunem că sistemul de coordonate *O* este în repaus, iar sistemul *O'* în translație şi rotație. Mobilul **M** se deplasează atât în raport cu *O*, cât şi cu *O'*. La acelaşi moment de timp, mobilul **M** are o poziție față de *O* (pe care convențional o numim **poziție absolută**) şi o poziție față de *O'* (pe care tot convențional o numim **poziție relativă**). Vectorii de poziție corespunzători **r**, respectiv **r**'. Tot la acel moment de timp, vectorul de poziție al punctului *O'* față de punctul *O* este $\mathbf{r}_{OO'}$. Cei trei vectori sunt reprezentați în figura alăturată, iar relația între ei este următoarea :

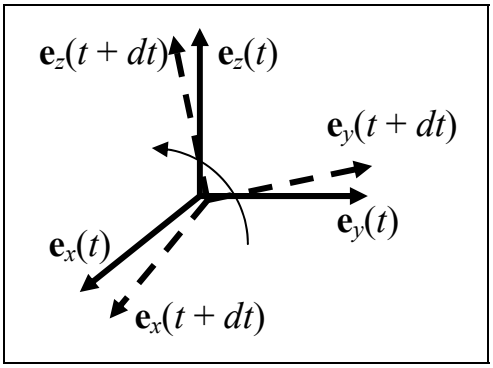
PRECIZAREA DE LA PAGINA 39

Referitor la balonul prins în miezul tornadei : nu poți afirma că sistemul de referință legat de pământ este mai bun decât cel legat de balon sau invers. Totuşi, este mai *practic* sistemul de referință legat de pământ, şi vom vedea de ce în secțiunea închinată *Dinamicii*.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{OO'} + \mathbf{r}'$

Relația între vectorii de poziție ai unui mobil în raport cu două sisteme de referință diferite.

DESPRE VARIAȚIA ÎN TIMP A BAZEI DE VERSORI A UNUI SISTEM DE COORDONATE CARE EXECUTĂ O MIȘCARE DE ROTAȚIE ÎN JURUL ORIGINII



La momentul t baza de versori este :

$$\mathbf{e}_x(t), \mathbf{e}_y(t), \mathbf{e}_z(t)$$

La momentul imediat următor $t + \delta t$ baza de versori devine :

$$\mathbf{e}_x(t + d\delta), \mathbf{e}_y(t + \delta t), \mathbf{e}_z(t + \delta t)$$

Noii versori pot fi exprimați prin combinații liniare ale vechilor versori, toți coeficienții $\delta\alpha_{ij}$ fiind cantități foarte mici în comparație cu unitatea :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x(t+\delta t) = (1+\delta\alpha_{xx})\mathbf{e}_x(t) + \delta\alpha_{xy}\mathbf{e}_y(t) + \delta\alpha_{xz}\mathbf{e}_z(t) \\ \mathbf{e}_y(t+\delta t) = \delta\alpha_{yx}\mathbf{e}_x(t) + (1+\delta\alpha_{yy})\mathbf{e}_y(t) + \delta\alpha_{yz}\mathbf{e}_z(t) \\ \mathbf{e}_z(t+\delta t) = \delta\alpha_{zx}\mathbf{e}_x(t) + \delta\alpha_{zy}\mathbf{e}_y(t) + (1+\delta\alpha_{zz})\mathbf{e}_z(t) \end{cases}$$

Mai putem scrie :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{e}_x(t+\delta t) - \mathbf{e}_x(t)}{\delta t} = \dfrac{\delta\alpha_{xx}}{\delta t}\mathbf{e}_x(t) + \dfrac{\delta\alpha_{xy}}{\delta t}\mathbf{e}_y(t) + \dfrac{\delta\alpha_{xz}}{\delta t}\mathbf{e}_z(t) \\ \dfrac{\mathbf{e}_y(t+\delta t) - \mathbf{e}_y(t)}{\delta t} = \dfrac{\delta\alpha_{yx}}{\delta t}\mathbf{e}_x(t) + \dfrac{\delta\alpha_{yy}}{\delta t}\mathbf{e}_y(t) + \dfrac{\delta\alpha_{yz}}{\delta t}\mathbf{e}_z(t) \\ \dfrac{\mathbf{e}_z(t+\delta t) - \mathbf{e}_z(t)}{\delta t} = \dfrac{\delta\alpha_{zx}}{\delta t}\mathbf{e}_x(t) + \dfrac{\delta\alpha_{zy}}{\delta t}\mathbf{e}_y(t) + \dfrac{\delta\alpha_{zz}}{\delta t}\mathbf{e}_z(t) \end{cases}$$

Când $\delta t \to 0$, rapoartele din membrul stâng au semnificația de derivate ale versorilor în raport cu timpul. Rapoartele de tipul $\delta\alpha_{ij}/\delta t$ pot fi notate cu ω_{ij} şi au la momentul t o valoarea determinată de calitățile mişcării de rotație. Prin urmare putem scrie :

PRECIZAREA DE LA PAGINA 40

Afirmam la începutul acestei cărți că „*timpul se scurge liniar de la trecut spre viitor, uniform în spațiu şi independent de prezența corpurilor care se află în spațiu*”. Acesta este motivul pentru care în cele ce urmează intervalele de timp scurse în sistemul mobil se consideră egale cu cele scurse în sistemul fix. Afirmația pe care o fac nu este probată şi poate fi pusă la îndoială !

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{e}_x}{dt} = \omega_{xx}\mathbf{e}_x + \omega_{xy}\mathbf{e}_y + \omega_{xz}\mathbf{e}_z \\ \dfrac{d\mathbf{e}_y}{dt} = \omega_{yx}\mathbf{e}_x + \omega_{yy}\mathbf{e}_y + \omega_{yz}\mathbf{e}_z \\ \dfrac{d\mathbf{e}_z}{dt} = \omega_{zx}\mathbf{e}_x + \omega_{zy}\mathbf{e}_y + \omega_{zz}\mathbf{e}_z \end{cases}$$

Sub formă matricială, relația de mai sus poate fi pusă sub forma :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_x \\ \dot{\mathbf{e}}_y \\ \dot{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{xx} & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ \omega_{yx} & \omega_{yy} & \omega_{yz} \\ \omega_{zx} & \omega_{zy} & \omega_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{\Omega E}$$

Versorii bazei satisfac relațiile :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\mathbf{e}_i}{dt} \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \cdot \dfrac{d\mathbf{e}_i}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\omega_{ii} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{ii} = 0 \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\mathbf{e}_i}{dt} \cdot \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \cdot \dfrac{d\mathbf{e}_j}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \end{cases}$$

Cu aceste relații, derivatele versorilor se scriu astfel :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_x = \omega_{xy}\mathbf{e}_y - \omega_{zx}\mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{e}}_y = -\omega_{xy}\mathbf{e}_x + \omega_{yz}\mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{e}}_z = \omega_{zx}\mathbf{e}_x - \omega_{yz}\mathbf{e}_y \end{cases}$$

Notând : $\omega_{xy} = \omega_z$, $\omega_{yz} = \omega_x$, $\omega_{zx} = \omega_y$ relațiile anterioare devin :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_x = \omega_z\mathbf{e}_y - \omega_y\mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{e}}_y = -\omega_z\mathbf{e}_x + \omega_x\mathbf{e}_z \\ \dot{\mathbf{e}}_z = \omega_y\mathbf{e}_x - \omega_x\mathbf{e}_y \end{cases}$$

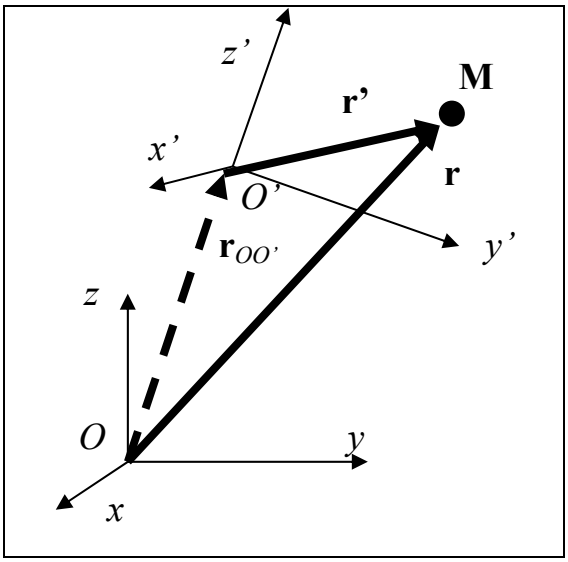
Această relație poate fi pusă şi sub formă matricială :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}}_x \\ \dot{\mathbf{e}}_y \\ \dot{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{\Omega E}$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 41

Din punct de vedere matematic, **Ω** este o mărime tensorială, care, în principiu, poate avea nouă componente. S-a arătat mai sus că, în fapt, **Ω** are doar trei componente independente şi formează un **tensor antisimetric**. Un tensor antisimetric este asimilabil unui vector (de fapt unui **pseudovector**), având ca şi acesta doar trei componente independente.

1.5.1. RELAȚIA DE COMPUNERE A VITEZELOR



Să presupunem că mobilul **M** din schița alăturată se deplasează în raport cu punctul *O*, care este originea unui sistem de axe de coordonate imobil.

Viteza mobilului în raport cu sistemul de coordonate imobil se numeşte **viteză absolută**.

Viteza absolută este prima derivată a vectorului de poziție **r** în raport cu timpul :

$$\mathbf{v}_{abs} = \dot{\mathbf{r}}$$

Am văzut puțin mai înainte că vectorul de poziție **r** se poate exprima în funcție de alți doi vectori de poziție **r'** şi $\mathbf{r}_{OO'}$. Notând coordonatele punctului *O'* în raport cu punctul *O* prin *X*, *Y* şi *Z* avem :

$$\mathbf{r} = X\mathbf{e}_x + Y\mathbf{e}_y + Z\mathbf{e}_z + x'\mathbf{e}'_x + y'\mathbf{e}'_y + z'\mathbf{e}'_z$$

Prin urmare, ținând cont că versorii $\mathbf{e}_i$ nu variază în timp, dar versorii $\mathbf{e'}_j$ variază dacă sistemul lor de coordonate se roteşte, putem scrie :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{X}\mathbf{e}_x + \dot{Y}\mathbf{e}_y + \dot{Z}\mathbf{e}_z + \dot{x}'\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z + x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y + z'\dot{\mathbf{e}}'_z$$

Ultimii trei termeni pot fi prelucrați înlocuind vitezele de variație ale versorilor prin expresiile lor corespunzătoare :

$$x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y + z'\dot{\mathbf{e}}'_z = x'\left(\omega_z\mathbf{e}'_y - \omega_y\mathbf{e}'_z\right) + y'\left(-\omega_z\mathbf{e}'_x + \omega_x\mathbf{e}'_z\right) + z'\left(\omega_y\mathbf{e}'_x - \omega_x\mathbf{e}'_y\right)$$

Reordonând în funcție de versorii bazei, obținem :

$$x'\dot{\mathbf{e}}'_x + y'\dot{\mathbf{e}}'_y + z'\dot{\mathbf{e}}'_z = \left(\omega_y z' - \omega_z y'\right)\mathbf{e}'_x + \left(\omega_z x' - \omega_x z'\right)\mathbf{e}'_y + \left(\omega_x y' - \omega_y x'\right)\mathbf{e}'_z$$

Revenind la expresia vitezei absolute, putem scrie :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 42

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\mathbf{e}_x + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\mathbf{e}_y + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{v}_{abs} = \underbrace{\underbrace{\dot{X}\mathbf{e}_x + \dot{Y}\mathbf{e}_y + \dot{Z}\mathbf{e}_z}_{\mathbf{v}_{translatie}} + \underbrace{(\omega_y z' - \omega_z y')\mathbf{e}'_x + (\omega_z x' - \omega_x z')\mathbf{e}'_y + (\omega_x y' - \omega_y x')\mathbf{e}'_z}_{\mathbf{v}_{rotatie} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'}}_{\mathbf{v}_{transport}} +$$

$$+ \underbrace{\dot{x}'\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z}_{\mathbf{v}_{relativa}}$$

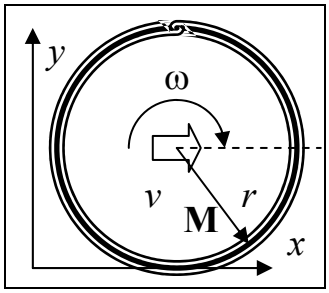
Viteza de transport $\mathbf{v}_{transport} = \mathbf{v}_{translatie} + \mathbf{v}_{rotatie}$ este viteza cu care un punct fixat din sistemul mobil se deplasează în raport cu sistemul fix. Viteza de transport are două componente vectoriale, dintre care una depinde de mişcarea de translaţie a sistemului mobil faţă de cel fix $\mathbf{v}_{translatie} = \dot{X}\mathbf{e}_x + \dot{Y}\mathbf{e}_y + \dot{Z}\mathbf{e}_z$, iar a doua de mişcarea de rotaţie a sistemului mobil faţă de cel fix $\mathbf{v}_{rotatie} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$, unde $\boldsymbol{\omega}$ este viteza unghiulară de rotaţie a sistemului mobil, iar **r'** este vectorul de poziţie momentan al mobilului în sistemul mobil.

Viteza relativă, $\mathbf{v}_{relativa} = \dot{x}'\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z$, este viteza instantanee a mobilului în raport cu sistemul mobil.

În mecanica clasică, relaţia de compunere a vitezelor are forma :

$$\boxed{\mathbf{v}_{abs} = \mathbf{v}_{transport} + \mathbf{v}_{relativa}}$$

şi enunţul : **viteza absolută este egală cu suma vectorială între viteza de transport şi viteza relativă**.



Exemplu : fie sistemul mobil format din roata de bicicletă din figura alăturată. Punctul **M** este în repaus faţă de roată şi, prin urmare, viteza relativă este nulă. Viteza de translaţie este viteza bicicletei v, iar viteza de rotaţie este $v' = \omega r$ (egală de fapt cu v). Notând cu θ unghiul făcut de raza vectoare a punctului **M** cu orizontala, expresiile componentelor vitezei absolute sunt : $v_x = v(1 - \sin\theta)$, respectiv $v_y = -v\cos\theta$.

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 43

În fotografia alăturată puteţi vedea roata unui tramvai. Întrebarea este : dacă tramvaiul se deplasează *înainte*, există puncte ale sale care se deplasează *înapoi* ?

1.5.2. RELAȚIA DE COMPUNERE A ACCELERAȚIILOR

✍ Accelerația mobilului în raport cu sistemul de coordonate imobil se numește **accelerație absolută**.

Accelerația absolută este prima derivată a vectorului viteză **v** în raport cu timpul :

$$\mathbf{a}_{abs} = \dot{\mathbf{v}}$$

Deoarece :

$$\mathbf{v} = \dot{X}\mathbf{e}_x + \dot{Y}\mathbf{e}_y + \dot{Z}\mathbf{e}_z + (\omega_y z' - \omega_z y')\mathbf{e}'_x + (\omega_z x' - \omega_x z')\mathbf{e}'_y + (\omega_x y' - \omega_y x')\mathbf{e}'_z +$$
$$+ \dot{x}'\mathbf{e}'_x + \dot{y}'\mathbf{e}'_y + \dot{z}'\mathbf{e}'_z$$

obținem prin derivare în raport cu timpul :

$$\dot{\mathbf{v}} = \ddot{X}\mathbf{e}_x + \ddot{Y}\mathbf{e}_y + \ddot{Z}\mathbf{e}_z + (\omega_y \dot{z}' - \omega_z \dot{y}')\mathbf{e}'_x + (\omega_z \dot{x}' - \omega_x \dot{z}')\mathbf{e}'_y + (\omega_x \dot{y}' - \omega_y \dot{x}')\mathbf{e}'_z +$$
$$+ (\dot{\omega}_y z' - \dot{\omega}_z y')\mathbf{e}'_x + (\dot{\omega}_z x' - \dot{\omega}_x z')\mathbf{e}'_y + (\dot{\omega}_x y' - \dot{\omega}_y x')\mathbf{e}'_z +$$
$$+ (\omega_y z' - \omega_z y')\dot{\mathbf{e}}'_x + (\omega_z x' - \omega_x z')\dot{\mathbf{e}}'_y + (\omega_x y' - \omega_y x')\dot{\mathbf{e}}'_z + \ddot{x}'\mathbf{e}'_x + \ddot{y}'\mathbf{e}'_y + \ddot{z}'\mathbf{e}'_z +$$
$$+ \dot{x}'\dot{\mathbf{e}}'_x + \dot{y}'\dot{\mathbf{e}}'_y + \dot{z}'\dot{\mathbf{e}}'_z$$

Înlocuind derivatele versorilor, se obține :

$$\dot{\mathbf{v}} = \ddot{X}\mathbf{e}_x + \ddot{Y}\mathbf{e}_y + \ddot{Z}\mathbf{e}_z + (\omega_y \dot{z}' - \omega_z \dot{y}')\mathbf{e}'_x + (\omega_z \dot{x}' - \omega_x \dot{z}')\mathbf{e}'_y + (\omega_x \dot{y}' - \omega_y \dot{x}')\mathbf{e}'_z +$$
$$+ + (\dot{\omega}_y z' - \dot{\omega}_z y')\mathbf{e}'_x + (\dot{\omega}_z x' - \dot{\omega}_x z')\mathbf{e}'_y + (\dot{\omega}_x y' - \dot{\omega}_y x')\mathbf{e}'_z +$$
$$+ (\omega_y z' - \omega_z y')(\omega_z \mathbf{e}'_y - \omega_y \mathbf{e}'_z) + (\omega_z x' - \omega_x z')(-\omega_z \mathbf{e}'_x + \omega_x \mathbf{e}'_z) + (\omega_x y' - \omega_y x')(\omega_y \mathbf{e}'_x - \omega_x \mathbf{e}'_y) +$$
$$+ \ddot{x}'\mathbf{e}'_x + \ddot{y}'\mathbf{e}'_y + \ddot{z}'\mathbf{e}'_z + \dot{x}'(\omega_z \mathbf{e}'_y - \omega_y \mathbf{e}'_z) + \dot{y}'(-\omega_z \mathbf{e}'_x + \omega_x \mathbf{e}'_z) + \dot{z}'(\omega_y \mathbf{e}'_x - \omega_x \mathbf{e}'_y)$$

Regrupând în funcție de versori, rezultă :

$$\dot{\mathbf{v}} = (\ddot{X}\mathbf{e}_x + \ddot{Y}\mathbf{e}_y + \ddot{Z}\mathbf{e}_z) + 2[(\omega_y \dot{z}' - \omega_z \dot{y}')\mathbf{e}'_x + (\omega_z \dot{x}' - \omega_x \dot{z}')\mathbf{e}'_y + (\omega_x \dot{y}' - \omega_y \dot{x}')\mathbf{e}'_z] +$$
$$+ [(\dot{\omega}_y z' - \dot{\omega}_z y')\mathbf{e}'_x + (\dot{\omega}_z x' - \dot{\omega}_x z')\mathbf{e}'_y + (\dot{\omega}_x y' - \dot{\omega}_y x')\mathbf{e}'_z] + (\ddot{x}'\mathbf{e}'_x + \ddot{y}'\mathbf{e}'_y + \ddot{z}'\mathbf{e}'_z) +$$
$$+ \left\{ \begin{array}{l} [\omega_y(\omega_x y' - \omega_y x') - \omega_z(\omega_z x' - \omega_x z')]\mathbf{e}'_x + [\omega_z(\omega_y z' - \omega_z y') - \omega_x(\omega_x y' - \omega_y x')]\mathbf{e}'_y + \\ + [\omega_x(\omega_z x' - \omega_x z') - \omega_y(\omega_y z' - \omega_z y')]\mathbf{e}'_z \end{array} \right\}$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 44

Prima derivată în raport cu timpul a unui vector exprimat în funcție de versorii sistemului mobil este :

$$\dot{\mathbf{A}}' = (\dot{A}'_x \mathbf{e}'_x + \dot{A}'_y \mathbf{e}'_y + \dot{A}'_z \mathbf{e}'_z) + (A'_x \dot{\mathbf{e}}'_x + A'_y \dot{\mathbf{e}}'_y + A'_z \dot{\mathbf{e}}'_z) =$$
$$= \dot{\mathbf{A}}'_{relativ} + (\omega_y A'_z - \omega_z A'_y)\mathbf{e}'_x + (\omega_z A'_x - \omega_x A'_z)\mathbf{e}'_y +$$
$$+ (\omega_x A'_y - \omega_y A'_x)\mathbf{e}'_z = \dot{\mathbf{A}}'_{relativ} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}'$$

Expresia poate fi restrânsă astfel :

$$\mathbf{a}_{abs} = \mathbf{a}_{translatie} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{a}_{relativa}$$

În expresie, apare prima derivată a vitezei unghiulare în raport cu timpul. Aceasta se numeşte **accelerație unghiulară** şi se notează cu **ε**. Factorii ecuației pot fi grupați după cum urmează :

$$\mathbf{a}_{abs} = \underbrace{\left(\mathbf{a}_{translatie} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'\right)}_{\mathbf{a}_{transport}} + \mathbf{a}_{relativa} + \underbrace{2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')}_{\mathbf{a}_{Corioris}}$$

Accelerația de transport $\mathbf{a}_{transport} = \mathbf{a}_{translatie} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'$ este accelerația cu care un punct fixat din sistemul mobil se deplasează în raport cu sistemul fix. Accelerația de transport are trei componente vectoriale, dintre care una depinde de mişcarea de translație a sistemului mobil față de cel fix $\mathbf{a}_{translatie} = \ddot{X}\mathbf{e}_x + \ddot{Y}\mathbf{e}_y + \ddot{Z}\mathbf{e}_z$, a doua de mişcarea de rotație a sistemului mobil față de cel fix $\mathbf{a}_{rotatie} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ (unde **ω** este viteza unghiulară de rotație a sistemului mobil, iar **r'** este vectorul de poziție momentan al mobilului în sistemul mobil), iar a treia ($\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'$) de variația în timp a vitezei de rotație a sistemului mobil.

Accelerația relativă, $\mathbf{a}_{relativa} = \ddot{x}'\mathbf{e}'_x + \ddot{y}'\mathbf{e}'_y + \ddot{z}'\mathbf{e}'_z$, este accelerația instantanee a mobilului în raport cu sistemul mobil.

Accelerația Coriolis $\mathbf{a}_{Coriolis} = 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') = 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{relativa})$ depinde atât de viteza relativă a corpului mobil, cât şi de starea de rotație a sistemului mobil în raport cu sistemul fix. Termenul de accelerație Coriolis nu poate fi inclus în accelerația de transport deoarece, prin definiție, accelerația de transport se referă la corpuri fixe în raport cu sistemul mobil. De asemenea accelerația Coriolis nu poate fi o componentă a accelerației relative deoarece ea cuprinde informație privind rotația sistemului mobil față de cel fix şi nu numai informație privind deplasarea corpului mobil în raport cu sistemul mobil (aşa cum presupune noțiunea de accelerație relativă).

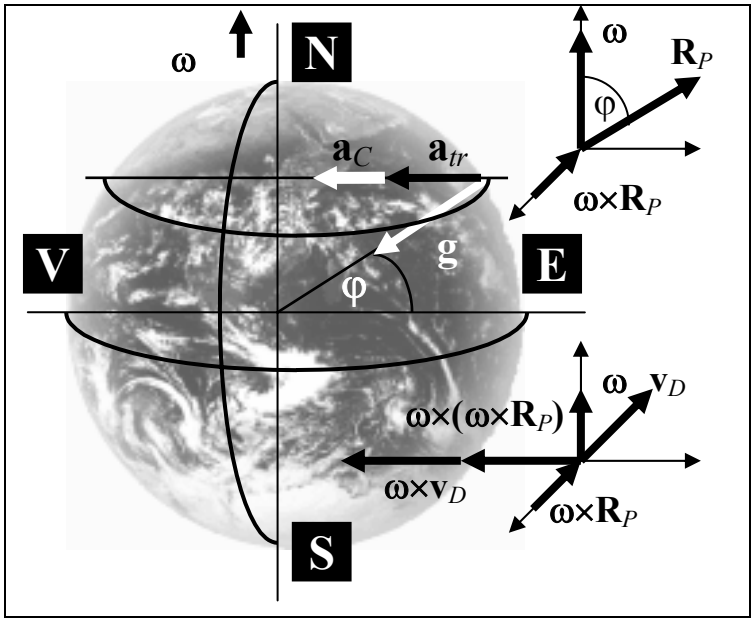
BIOGRAFIA DE LA PAGINA 45

Coriolis a fost inginer şi matematician francez. În 1835 a publicat o lucrare în care a arătat că la deplasarea unui corp pe o suprafață în rotație, asupra corpului acționează o forță suplimentară, perpendiculară pe direcția sa de deplasare. Forța Coriolis este de mare importanță în meteorologie, balistică şi oceanografie. În meteorologie, forța Coriolis explică direcția vântului şi modul de formare a vârtejurilor care sunt uraganele şi tornadele.

✍ În mecanica clasică, relația de compunere a accelerațiilor are forma :

$$\mathbf{a}_{abs} = \mathbf{a}_{transport} + \mathbf{a}_{relativa} + \mathbf{a}_{Coriolis}$$

şi enunțul : **accelerația absolută este egală cu suma vectorială între accelerația de transport, accelerația relativă şi accelerația Coriolis**.

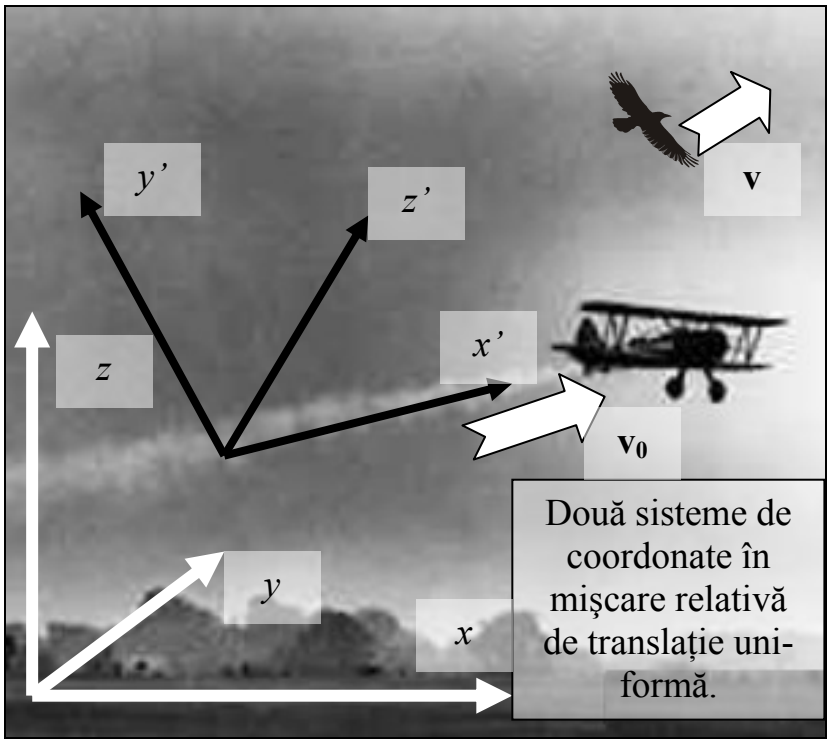


Exemplu : pentru un observator din sistemul de referință cu originea în centrul Pământului şi care are drept corpuri de referință trei stele fixe (acesta fiind sistemul de referință fix), planeta noastră se roteşte de la vest la est, în jurul axei care trece prin cei doi poli, cu viteză unghiulară ω constantă (ε = 0). Un alt observator ar putea face parte dintr-un sistem de referință cu originea tot în centrul Pământului, dar care are drept corpuri de referință trei oraşe, printre care şi Galațiul (acesta fiind sistemul de referință mobil). Conform acestor două alegeri, sistemul mobil este doar în rotație în raport cu sistemul fix, nu şi în translație. Obiectul în mişcare ar putea fi apa Dunării, care poate fi considerată că se deplasează cu viteză constantă de la est spre vest (evident, afirmația este adevărată pentru observatorul din sistemul legat de suprafața Pământului). Deci, relativ la observatorul mobil, Galațiul este în repaus, ceea ce înseamnă că atât viteza relativă cât şi accelerația relativă ale Galațiului sunt nule, iar apa Dunării se deplasează cu viteză relativă constantă, accelerația sa relativă fiind nulă. Pentru observatorul fix, atât Galațiul cât şi apa Dunării se deplasează, fiind caracterizate de vitezele şi accelerațiile lor absolute. În condițiile enunțate, Galațiul are o accelerație de transport $a_{tr} = \omega^2 R_P \sin\varphi$, la fel ca şi apa Dunării (R_P este raza Pământului). În schimb, accelerația Coriolis a Galațiului este nulă, pe când cea a apei din Dunăre este $a_C = \omega v_D$ (v_D este viteza de curgere a *Dunării). Ce înseamnă că accelerațiile absolute sunt diferite* ? Nimic altceva decât aceea că apa Dunării tinde să se apropie de malul nordic şi să se depărteze de cel sudic.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 46

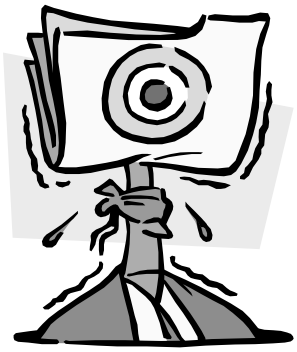
Raportul $\dfrac{a_C}{a_{tr}} = \dfrac{v_D}{\omega R_P \sin\varphi} = \dfrac{v_D T_{rot}}{2\pi R_P \sin\varphi}$ are valori relativ mici. Astfel, pentru v_D = 2 m/s, T_{rot} = 1 zi = 86400 s, φ = 45° şi R_P = 6400 km, acest raport este aproximativ egal cu 0,006. Deci accelerațiile absolute diferă cu circa 0,6%.

1.5.3. TRANSFORMAREA GALILEI



Două sisteme de coordonate în mişcare relativă de translaţie uniformă.

Fie cele două sisteme de coordonate din fotografia alăturată. Unul dintre ele este legat de pământ, iar celălalt de avion. Presupunem că **avionul se deplasează rectiliniu şi uniform** în raport cu solul, iar viteza sa $\mathbf{v}_0$ este orientată paralel cu axa *Ox*'. Pe cer zboară o pasăre, cu viteza **v** faţă de sol şi **v**' faţă de avion. Vectorul de poziţie al păsării faţă de sol este **r**, iar faţă de avion este **r**'. Vectorul de poziţie al avionului faţă de sistemul de referinţă legat de sol este $\mathbf{r}_0$.



NE PUNEM ÎNTREBAREA : CUNOSCÂND POZIŢIA ŞI VITEZA PĂSĂRII FAŢĂ DE UNUL DINTRE SISTEMELE DE REFERINŢĂ, PRECUM ŞI POZIŢIA ŞI VITEZA UNUI SISTEM DE REFERINŢĂ FAŢĂ DE CELĂLALT, PUTEM OARE DETERMINA POZIŢIA ŞI VITEZA PĂSĂRII FAŢĂ DE CEL DE-AL DOILEA SISTEM DE REFERINŢĂ ?

Parţial, răspunsurile la aceste întrebări sunt conţinute în paginile anterioare.

Cel mai simplu dintre răspunsuri este cel legat de viteză. Viteza păsării în sistemul de referinţă legat de sol reprezintă viteza absolută, iar viteza păsării faţă de avion este viteza relativă. Deoarece avionul nu se roteşte faţă de sol, viteza sa de translaţie $\mathbf{v}_0$ este chiar viteza de transport. Prin urmare, putem scrie relaţia :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$$

Relaţia de compunere galileană a vitezelor

BIOGRAFIA DE LA PAGINA 47

Galileo Galilei, 15 feb. 1564 – 8 ian. 1642. Fizician, astronom şi matematician italian. A adus contribuţii fundamentale în ştiinţele mişcării, astronomiei şi rezistenţei materialelor, precum şi la dezvoltarea metodelor ştiinţifice. A considerat că limbajul matematic este cel mai potrivit pentru a descrie fenomenele fizice, iar pentru a-l folosi trebuie făcute, mai întâi, determinări experimentale. A inventat telescopul şi a susţinut modelul heliocentric.

În ceea ce priveşte vectorii de poziție, relația dintre ei este :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$$

Pentru că sistemul de referință mobil (avionul) este în translație uniformă în raport cu sistemul de referință fix (solul), iar viteza sa este $\mathbf{v}_0$, vectorul de poziție $\mathbf{r}_0$ poate fi exprimat utilizând legea mişcării rectilinii uniforme ($\mathbf{r}_0^{(i)}$ este vectorul de poziție al originii sistemului mobil la momentul de timp t_0) :

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0^{(i)} + \mathbf{v}_0(t - t_0)$$

În consecință, relația între vectorii de poziție devine :

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0^{(i)} + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \mathbf{r}'}$$

Relația galileană între vectorii de poziție

Cel mai simplu caz de mişcare relativă de translație uniformă a două sisteme de referință este acela în care momentul inițial de timp este $t_0 = 0$, originile celor două sisteme de referință se suprapun la momentul inițial de timp (adică $r_0^{(i)} = 0$), iar axele de coordonate ale unui sistem de referință sunt paralele cu acelea ale celuilalt referențial (care are drept consecința şi relația $\mathbf{v}_0 = \pm v_0 \mathbf{e}_x$). În această situație, relațiile între vectorii de poziție sau între viteze devin :

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x' \pm v_0 t \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

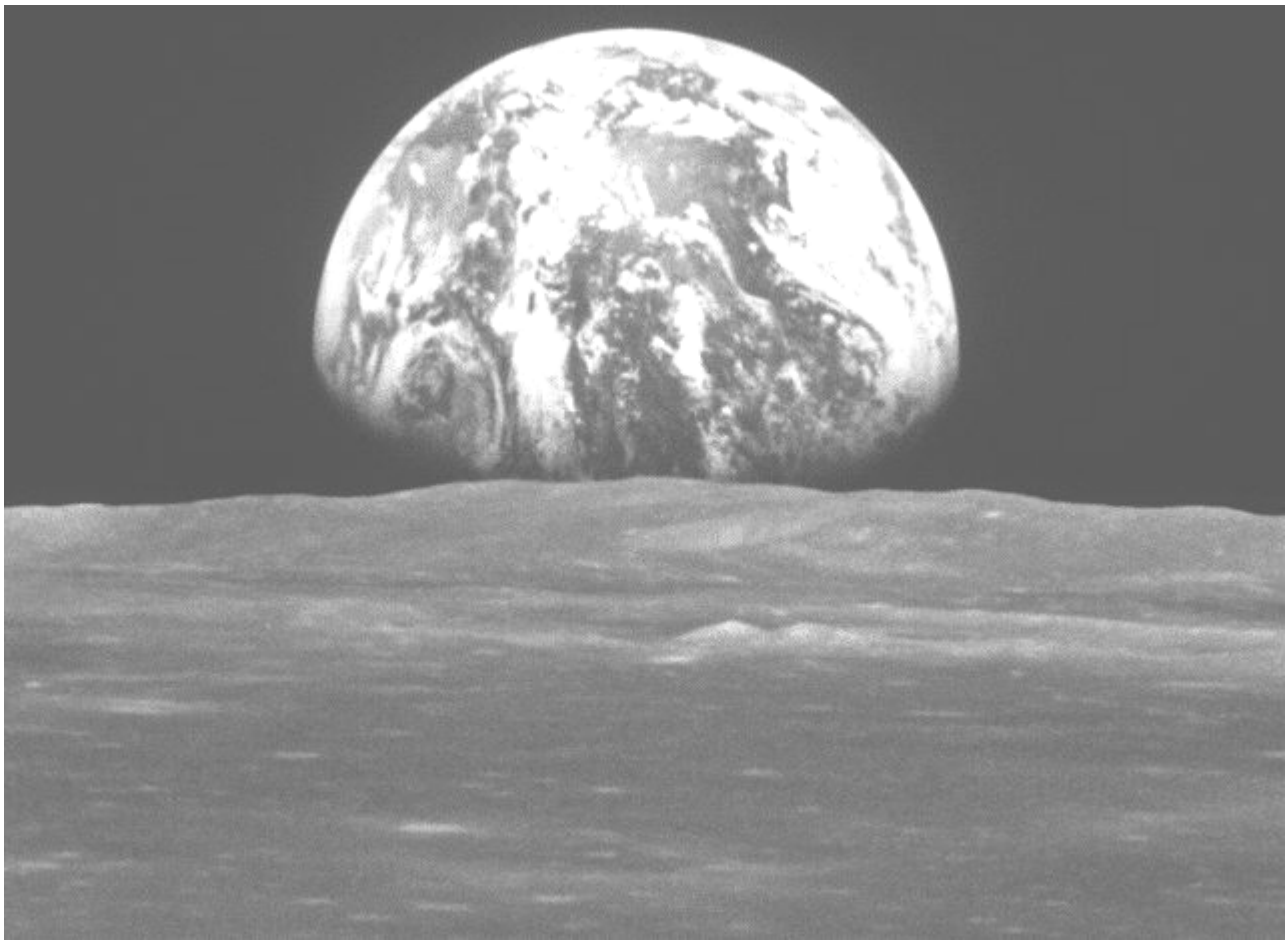
$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} v_x = v'_x \pm v_0 \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$$

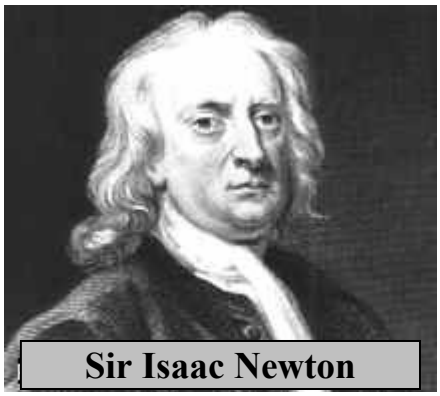
Trebuie menționat încă o dată că aceste relații sunt valabile doar în ipoteza implicită că timpul se scurge la fel în ambele sisteme de referință : $t = t'$

COMENTARIUL DE LA PAGINA 48

În cazul transformărilor Galilei sistemul mobil este în translație uniformă față de cel fix. Consecințele sunt două la număr : vectorul viteză de transport este constant în timp, iar vectorul accelerație de transport este nul. Faptul că accelerația de transport este nulă are o însemnătate deosebită : **accelerația absolută şi accelerația relativă sunt egale ca vectori**: **a = a'.**

2. DINAMICA




Sir Isaac Newton

În fotografia de mai sus puteți admira răsăritul Pământului pe Lună. Pentru ca un om să poată imortaliza pe peliculă acest moment, în spatele lui s-au găsit națiuni mari şi ambițioase, forțe tehnologice, zeci de mii de oameni implicați în proiect, dar şi puterea Ştiinței contemporane.

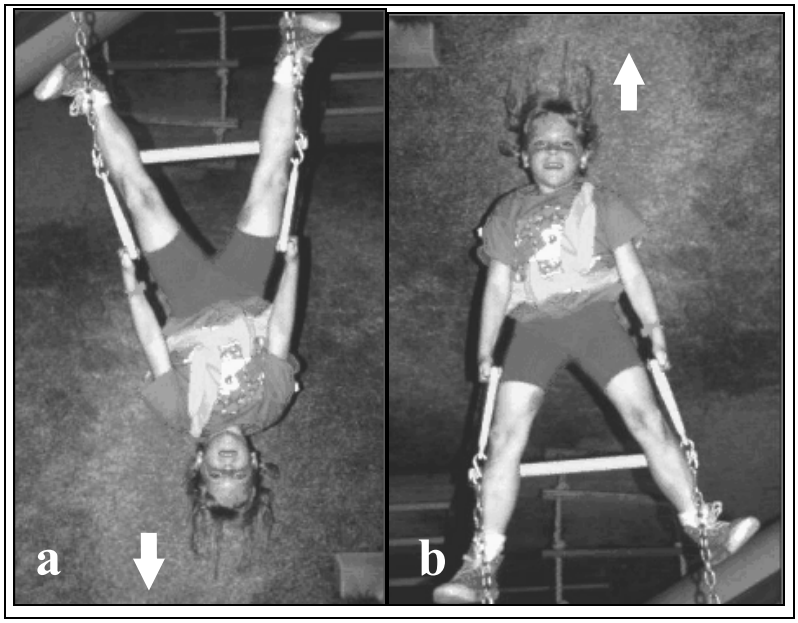
Unul dintre făuritorii preaputernicei Ştiințe, omul care a înțeles şi explicat pentru prima oară geniala simplitate a mecanicii cereşti fost Sir **Isaac Newton**.

CUGETAREA DE LA PAGINA 49

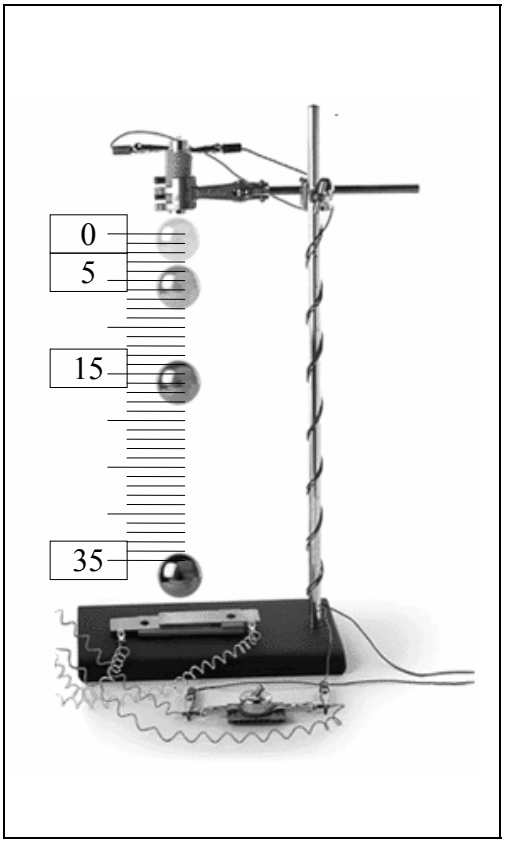
Nu ştiu cum mă înfățişez eu lumii, dar, în sinea mea, mă simt doar un băiețel care, jucându-se pe țărmul mării, este atras câteodată de câte o pietricică mai lustruită sau de o scoică mai frumoasă decât altele, în timp ce imensul ocean al adevărului se întinde necercetat în fața sa.

Isaac Newton (1642–1727), om de ştiință englez

2.1. FORȚE



Priviți figura alăturată. *Ce părere aveți, fotografia trebuie așezată în poziția* **a**, *sau în poziția* **b** ? Dacă aveți spirit de observație, veți răspunde, fără îndoială, : **a**. *De ce* ? Evident, din cauza poziției părului ! El nu poate *atârna în sus* ! *Dar, în fond, de ce atârnă părul* ? Răspunsul *pare* simplu : din cauza **gravitației**. Altfel spus, din cauza atracției exercitate de Pământ.



Cum se manifestă gravitația ? Asta o știm cu toții : lăsând din mână un corp „greu”, el va cădea spre sol. Problemele care se pun în continuare sunt :

- *ce fel de mişcare are un corp care cade* ?
- *cad toate corpurile la fel* ?

Răspunsul la prima întrebare se poate găsi prin experiment. Să privim figura alăturată. Vedem acolo un aparat de laborator, construit pentru măsurarea timpului de cădere al unei bile de oțel.

Pe figură sunt reprezentate pozițiile bilei la patru momente de timp. Duratele determinate de momentele de timp succesive sunt egale între ele. Am inclus în figură şi o riglă pentru măsurarea distanței parcurse. *Ce observăm* ? Să facem mai întâi un tabel cu datele din figură :

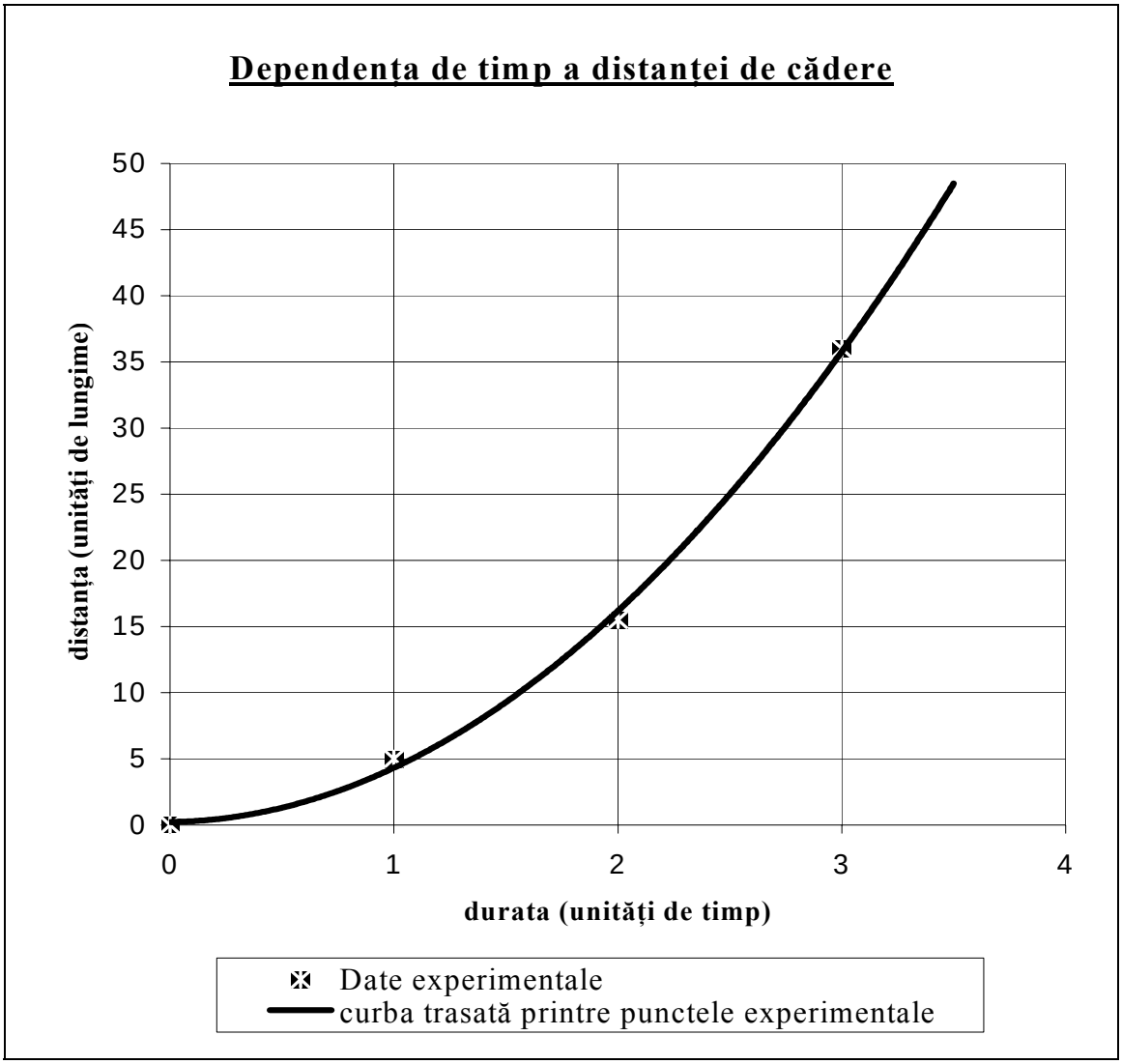
PRECIZAREA DE LA PAGINA 50

Spuneam că răspunsul „gravitația” *pare* simplu. El este simplu atunci când menționăm gravitația, pe care o simțim cu toții, şi ni se pare a fi fenomen firesc. Răspunsul este, însă, complicat dacă ne întrebăm cum se explică *existența* gravitației ca fenomen fizic. De aceea, în cele ce vor urma, nu vom discuta **ce este** gravitația, ci numai **cum se manifestă** ea.

Momentul de timp (unități de timp)	Distanța parcursă (unități de lungime)	Spațiul parcurs în unitatea de timp (unități de lungime/unități de timp)
0	0	-
1	5	5
2	15,5	10,5
3	36	20,5

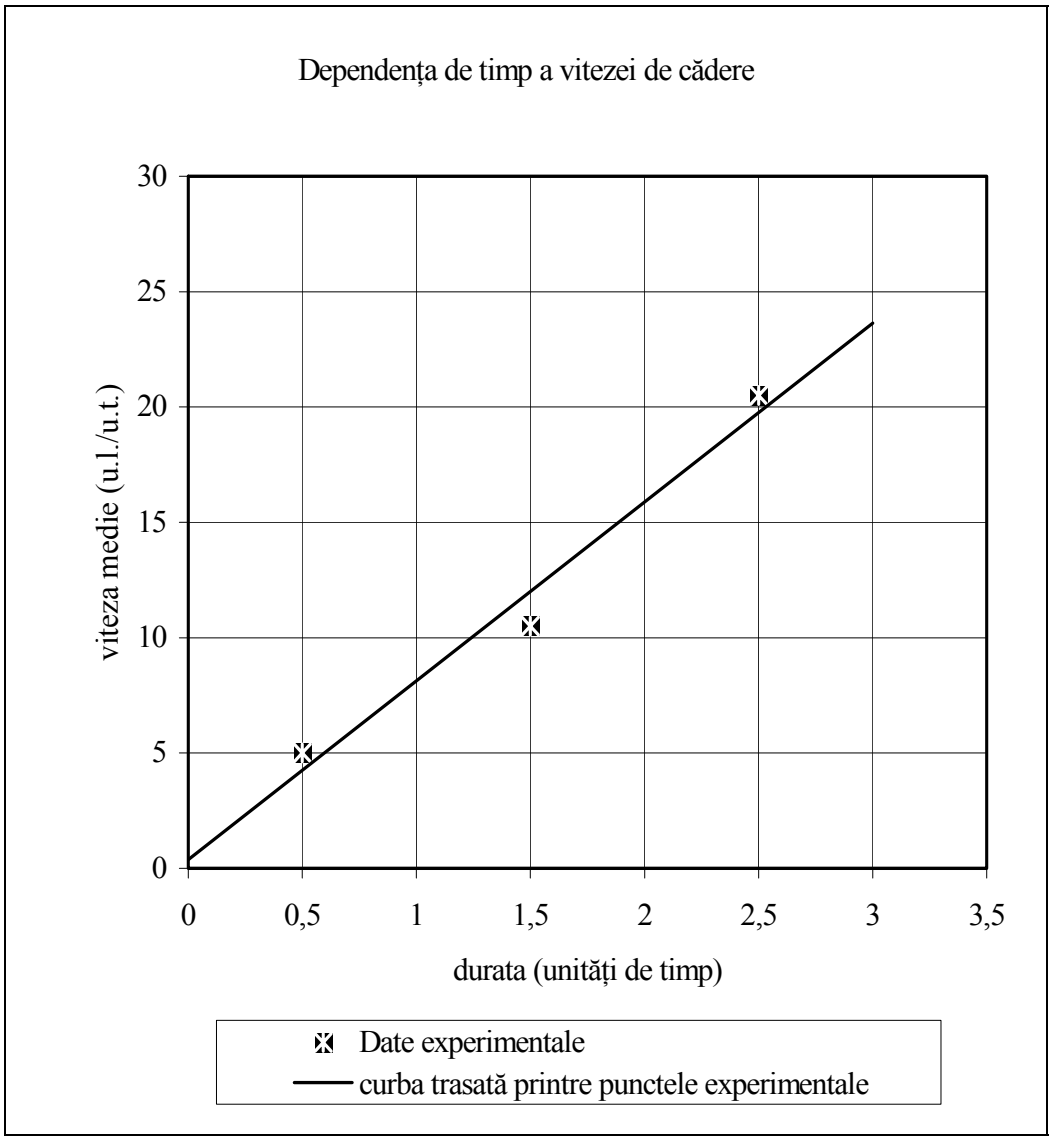
Coloana a treia a tabelului cuprinde valoarea vitezei medii în fiecare dintre cele trei intervale de timp.

Observăm că graficul distanței parcurse în funcție de timp este o curbă, numită *parabolă*, care este reprezentarea grafică a unei funcții polinomiale de gradul doi.



PROBLEMA DE LA PAGINA 51

Încercați ca prin extrapolare şi calcul să adăugați o linie nouă (corespunzătoare momentului de timp 4) în tabelul de pe această pagină.



Pe de altă parte, *presupunând că viteza medie este aceeaşi ca şi viteza bilei la momentele de timp corespunzătoare jumătăţilor intervalelor de timp* considerate, trasăm şi graficul vitezei în funcţie de timp. Observăm că el este, cu bună aproximaţie, o linie dreaptă.

✍ Aceasta ne arată că viteza de cădere creşte cu cantităţi egale în intervale de timp egale. Cu alte cuvinte, **gravitaţia terestră determină căderea uniform accelerată a corpurilor**.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 52

Experienţele prin care se măsoară acceleraţia gravitaţională arată un fapt deosebit de interesant : în limitele de precizie ale instrumentelor de măsură, acceleraţia este constantă pe tot parcursul mişcării şi deci nu depinde de viteza corpului la un moment dat.

Nu am răspuns încă întrebării : *cad toate corpurile la fel* ?

Din experiența de toate zilele, veți răspunde, probabil, că *nu* : corpurile „uşoare” cad mai încet decât corpurile „grele”. Aşa spunea, de altfel, şi Aristotel, marele filozof al Antichității, care a trăit între 384 şi 322 îC.

Aşa spuneau şi cei care, bazându-se pe autoritatea lui Aristotel, predau fizica cu aproape două mii de ani mai târziu. Galileo Galilei era, însă, nemulțumit de această afirmație. Iată cum gândea el :

- ❖ să presupunem că Aristotel are dreptate : *o piatră mai mare cade mai repede decât o piatră mai mică*
- ❖ să luăm două pietre, una mai mare şi una mai mică şi să le legăm între ele
- ❖ lăsându-le să cadă, piatra mai mică o va frâna pe aceea mai mare, iar *ansamblul va cădea mai încet decât ar cădea doar piatra mare*
- ❖ pe de altă parte, *grupul de două pietre este mai greu decât fiecare piatră în parte*, ceea ce înseamnă că *ansamblul va cădea mai repede decât ar cădea doar piatra mare*
- ❖ evident, **cele două afirmații se contrazic**, ceea ce înseamnă că **ipoteza este falsă**
- ❖ **deci, cele două pietre cad la fel de repede, deşi au greutăți diferite**

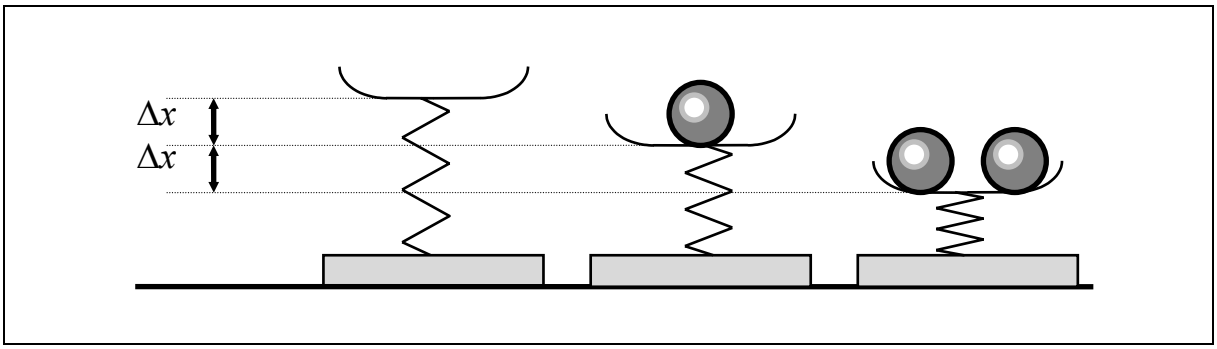
De aceea, Galilei şi-a propus **să verifice experimental** ceea ce se întâmplă. Pentru aceasta, el a lăsat să cadă simultan, de la înălțimea turnului din Pisa, diferite corpuri „grele” şi a constatat, în limita mijloacelor sale de măsură, că ele ating simultan solul. Galilei a găsit şi explicația căderii mai lente a corpurilor „uşoare”. În acest caz, **nu gravitația este „de vină”,** ea având aceleaşi efecte**, ci aerul**. Influența aerului asupra obiectelor în cădere este mai puternică asupra corpurilor „uşoare” – comparativ cu influența gravitației – decât asupra corpurilor grele.

Dacă am înlătura aerul, gravitația ar face ca toate corpurile să cadă la fel de repede.

Această afirmație a fost verificată experimental şi s-a găsit că este corectă.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 53

Măsurătorile experimentale au arătat că, la suprafața Pământului, în vid, accelerația căderii corpurilor este aproape constantă pe toată planeta, variind uşor de la poli spre Ecuator. Accelerația căderii libere a corpurilor în vid se numeşte **accelerație gravitațională** şi se notează cu **g**. La latitudinea la care se găseşte țara noastră, ea este aproximativ : $\mathbf{g = 9{,}81\ m/s^2}$.

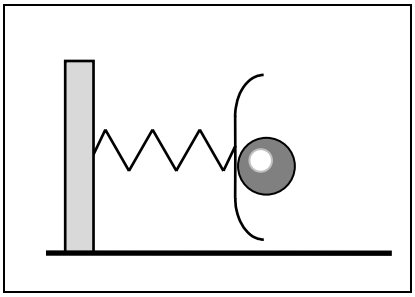


Să discutăm acum o altă experiență. Priviți figura de mai sus. Dispunem de un dispozitiv format dintr-un taler foarte ușor, sprijinit de un resort elastic, montat, la rândul său, pe un stativ orizontal. Avem, de asemenea, un număr de bile de oțel identice. Punând pe taler o bilă, observăm că resortul se scurtează cu lungimea Δx. Adăugând o altă bilă, resortul se mai scurtează cu Δx şi tot aşa. *Ce rezultă de aici* ?

Prima remarcă ar fi aceea că prezența bilelor pe taler afectează lungimea resortului. Deci, bilele au o influență asupra resortului. De data aceasta influența nu se mai manifestă prin accelerarea mişcării, ci prin *deformare* !

În al doilea rând, constatăm că deformarea este proporțională cu numărul de bile aşezate pe taler. Să ne imaginăm că am topi bilele şi am confecționa cu materialul rezultat o singură bilă. Punând-o pe taler am măsura aceeaşi deformare ca şi când pe taler ar fi aşezate bilele inițiale. Deci, **deformarea este proporțională cu cantitatea de material a corpului aşezat pe taler**.

În al treilea rând, să observăm că dacă am monta dispozitivul în poziție orizontală, ca în figura de mai jos, nu am mai obține nici-o deformare, iar bila ar cădea de pe taler. Deci, **influența bilei se manifestă doar pe direcția şi în sensul în care ea ar cădea liber**, influențată, la rândul ei, de Pământ.



Să discutăm acum şi despre bile. Fiecare dintre ele stă în repaus pe taler. *De ce bilele nu mai cad* ? *Nu se mai află ele sub influența Pământului* ?

Răspunsul cel mai *simplu* pe care îl putem da este că talerul *nu suprimă* influența Pământului, dar exercită, la rândul său, o influență asupra bilelor, care *anulează* influența Pământului.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 54

Este evident că natura influenței pe care o exercită talerul nu mai este una gravitațională (în caz contrar, toate corpurile vecine ar „cădea” către taler !). De fapt, cauza influenței pe care o exercită talerul asupra bilelor trebuie legată de scurtarea resortului prins de taler şi de caracteristicile acestuia.

Putem desprinde de aici **o idee fundamentală** : deşi cauzele care fac ca un corp să exercite o influenţă asupra altui corp pot fi diferite, **efectele acestor influenţe pot fi comparate** ! Faptul că efectele pot fi comparate între ele deschide calea, deosebit de importantă, a posibilităţii de a *măsura* efectul influenţei pe care o are un corp asupra altuia.

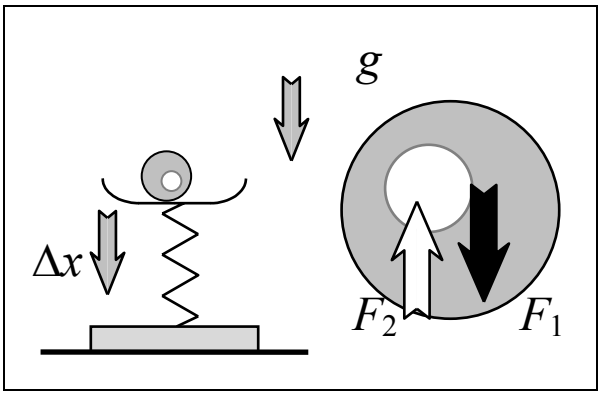
Un alt aspect important relevat de această experienţă este următorul : se observă că bila influenţează talerul, dar şi că talerul influenţează bila. Cu alte cuvinte, **există o reciprocitate : influenţa pe care o exercită un corp A asupra unui corp B este însoţită de un** „*răspuns*” **al corpului B asupra corpului A**.

Vom conveni să numim acum înainte, pe scurt, „*influenţa pe care un corp o exercită asupra altui corp*” şi care are drept ca rezultat **schimbarea stării de mişcare** sau **deformarea** acestuia din urmă : „*acţiunea unui corp asupra altui corp*” . **Mărimea fizică** prin care măsurăm tăria acţiunii o vom numi **forţă**.

Din cele discutate până acum, rezulta că accelerаţia sau mărimea deformării se pot constitui în măsuri ale acţiunii exercitate de un corp asupra altui corp. De aceea, forţa ar trebui să fie proporţională fie cu accelerаţia, fie cu mărimea deformării :

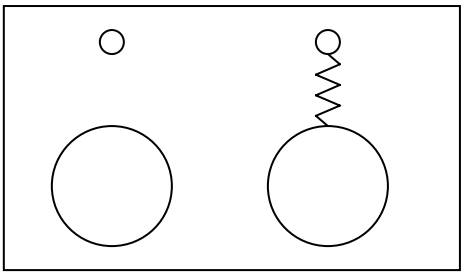
$F \sim a$

$F \sim \Delta x$



Să revenim la experienţa cu resortul elastic şi bile. Remarcasem că bila de pe taler rămâne în repaus (figura alăturată), deşi asupra sa acţionează două corpuri : Pământul şi talerul (alte influenţe, cum ar fi aceea a aerului, pot fi neglijate). Spuneam despre cele două acţiuni că se compensează reciproc, ceea ce explică rămânerea în **echilibru** a bilei.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 55



În ambele cazuri, fie că există sau nu resortul, interacţiunea principală are loc între corp şi Pământ, acesta din urmă fiind presupus imobil.

Situația în care accelerația unui corp este nulă se numeşte **stare de echilibru mecanic**.

Notând forțele care acționează asupra bilei prin F_1 (acțiunea Pământului) şi F_2 (acțiunea talerului), rezultă expresia matematică a afirmației „cele *două acțiuni se compensează reciproc, ceea ce explică rămânerea în echilibru a bilei*”, numită **condiția de echilibru** :

$$F_1 - F_2 = 0$$

Remarcasem că acțiunea talerului depinde de mărimea deformării resortului, dar şi de caracteristicile resortului (un resort mai „tare” se deformează mai puțin decât unul mai „slab”). Vom exprima matematic aceasta afirmație astfel :

$$F_2 = k\Delta x$$

unde Δx este valoarea deformării, iar k este o constantă care ia în considerare caracteristicile resortului şi se numeşte **constanta de elasticitate**.

Forța cu care Pământul acționează asupra bilei se numeşte **greutate**, fiind notată cu G ($F_1 = G$). Efectul pe care-l produce greutatea, în absența altor forțe, este accelerarea corpului asupra căruia acționează. Prin urmare, greutatea trebuie să fie măsurată prin accelerația gravitațională, dar şi printr-o mărime caracteristică corpului, pentru că nu toate corpurile au aceeaşi greutate. Remarcasem, de asemenea, că :

- efectul deformator al acțiunii bilei asupra resortului este proporțional cu cantitatea de substanță materială înglobată în bilă
- acțiunea bilei asupra talerului este rezultatul faptului că sub influența gravitației bila tinde să coboare

Am putea concluziona de aici că forța cu care bila acționează asupra talerului este egală numeric cu greutatea bilei şi că aceasta din urmă este proporțională cu cantitatea de substanță materială conținută de bilă.

Mărimea fizică care măsoară cantitatea de substanță materială conținută de un corp se numeşte **masă** şi este notată cu m.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 56

În SI, unitatea de măsură a masei se numeşte **kilogram** :

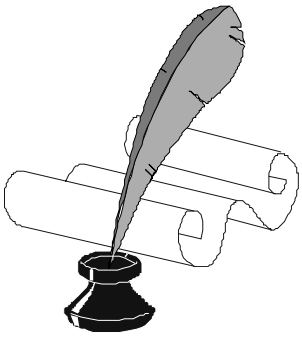
$$[m]_{SI} = \text{kg}$$

Un kilogram este egal cu masa prototipului internațional al kilogramului – un cilindru confecționat dintr-un aliaj de platină şi iridiu, păstrat la Biroul Internațional de Măsuri şi Greutăți, păstrat la Sevres, lângă Paris.

Deci greutatea bilei se poate scrie ca un produs de doi factori :

$$G = mg$$

Cum greutatea este o forță, putem face ipoteza că, în general, orice forță care are ca efect accelerarea unui corp ar trebui să fie proporțională cu produsul dintre masa corpului şi accelerația imprimată acestuia :
$F = ma$



În particular, în experiența pe care o comentăm, ar fi trebuit să scriem zeroul din membrul drept al condiției de echilibru astfel $0 = m \cdot 0$:

$$mg - k\Delta x = m \cdot 0$$

înțelegând astfel că suprapunerea a două acțiuni diferite este echivalentă unei singure acțiuni, numită **acțiune rezultantă**, **care produce un singur efect măsurabil** (în cazul nostru, lipsa accelerației).

În fine, pentru a încheia discutarea experienței cu bile şi resort elastic, să ne amintim că am remarcat că acțiunea bilelor asupra talerului este orientată vertical, de sus în jos. Aceasta înseamnă că **forțele sunt reprezentabile prin mărimi vectoriale**. Forța cu care talerul acționează asupra bilei este orientată în sens opus vectorului deformare. Prin urmare, această forță se scrie astfel :

$$\mathbf{F}_2 = -k\Delta\mathbf{x}$$

Constanta de elasticitate k este un scalar pozitiv. **Greutatea este un vector îndreptat în direcția şi în sensul accelerației gravitaționale** :

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g}$$

Şi masa m este un scalar pozitiv.

Sub formă vectorială, condiția de echilibru se scrie astfel :

$$\mathbf{G} + \mathbf{F}_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m\mathbf{g} + \left(-k\Delta\mathbf{x}\right) = 0$$

Mai trebuie menționat că, într-o reprezentare grafică, punctul de aplicație al unui vector forță trebuie să indice corpul asupra căruia acționează forța.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 57

În relația : $F = ma$, masa joacă rolul unei mărimi care ne arată cât de dificil este să schimbăm starea de mişcare a unui corp dat. Aceeaşi forță va accelera mai puțin un corp cu masă mare decât un corp cu masă mică. Din acest motiv, spunem că în această relație masa este o măsură a **inerției** corpurilor. **Inerția** este definită ca fiind proprietatea corpurilor de a tinde să-şi păstreze starea de mişcare rectilinie uniformă sau de repaus relativ.

ÎN REZUMAT

Efectele acțiunilor pe care unele corpuri le exercită asupra altor corpuri sunt măsurate prin mărimi fizice vectoriale numite **forțe.**

Aceste efecte pot fi de două categorii :

❖ **efecte dinamice**, adică efecte care au ca rezultat schimbarea stării de mişcare a corpurilor şi sunt măsurate prin vectorul accelerație.

❖ **efecte statice**, adică efecte care au ca rezultat deformarea corpurilor şi sunt măsurate prin vectorul deformare.

Efectele acțiunii forțelor asupra unui corp depind şi de două mărimi scalare care-l caracterizează pe acesta :

❖ **masa**, în cazul efectului dinamic

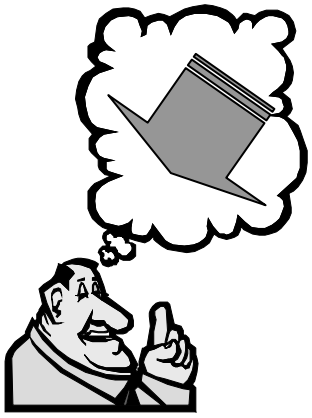
❖ **constanta de elasticitate**, în cazul efectului static

În cele două cazuri, expresiile matematice ale forțelor sunt:

efectul dinamic : $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

efectul static : $\mathbf{F} = k\Delta\mathbf{x}$

Dacă mai multe forțe acționează asupra unui singur corp, ele se compun (au o **rezultantă**) şi putem măsura experimental, ca efecte rezultante, un singur efect dinamic şi un singur efect static



Am utilizat noțiunea de **masă** ca măsură a cantității de substanță materială pe care o conțin diferitele corpuri. Spunem că un corp este alcătuit din substanță, încercând să realizăm distincția față de alte forme de manifestare ale existenței materiei. **Materia** este o parte a triadei **spațiu-timp-materie**, constituită din aceste trei **categorii fundamentale** ale realității fizice. Mecanica clasică se mulțumeşte să ia în considerare doar manifestări, socotite independente, ale acestor categorii fundamentale. Conform acestei concepții, spațiul şi timpul există în afara materiei, constituind un „recipient" în care este introdusă aceasta. Prin urmare, măsurarea masei se face prin comparație cu o masă etalon aleasă arbitrar şi considerată ca unitate de măsură. Din această cauză, masa este mărime fizică fundamentală a SI, la fel ca şi lungimea şi intervalul de timp. Masa, durata şi distanța sunt mărimi scalare, iar valorile lor nu depind de sistemul de referință ales

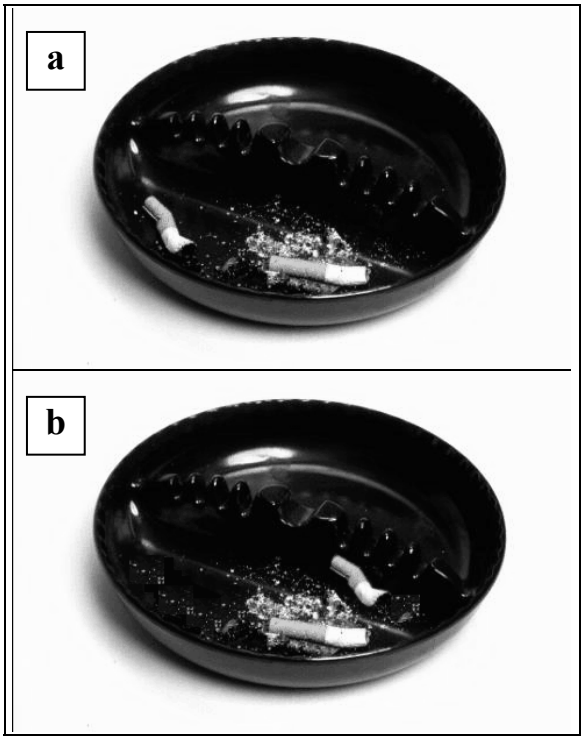
INFORMAȚIA DE LA PAGINA 58

Unitatea de măsură a forței este **newtonul**. Relația sa cu unitățile fundamentale din SI este următoarea :

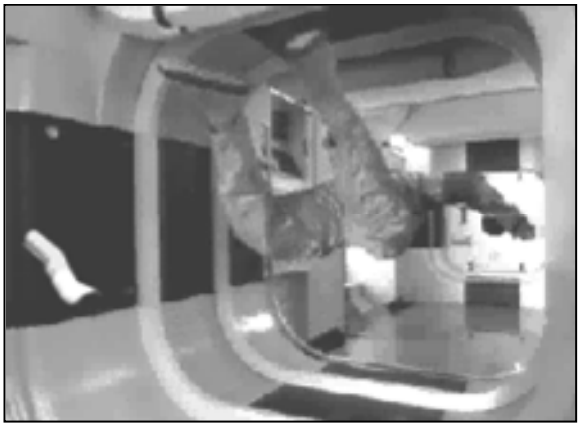
$$[F]_{SI} = [m]_{SI} \cdot [a]_{SI} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{N}$$

2.2. PRINCIPIILE DINAMICII NEWTONIENE

2.2.1. PRINCIPIUL INERȚIEI



Puneți-vă în pielea unui detectiv şi examinați fotografiile **a** şi **b** din figura alăturată. Veți afirma că : „***sigur**, o persoană a schimbat poziția mucului de țigară*”. *De ce* „***sigur***” ? Pentru că, din experiența de zi cu zi, **ştim** că un asemenea obiect nu poate părăsi **de la sine** poziția pe care o ocupă în scrumieră. Altceva, ce **ştim sigur**, este că dacă am lăsa din mână mucul de țigară undeva, în aer, acesta ar cădea. Mai **ştim** să explicăm căderea prin acțiunea gravitației terestre. *Dar ce ne facem cu situația din figura* aflată mai jos ? Mucul de țigară părăsit de astronautul de pe stația orbitală *nu cade*, ci *pluteşte prin cabină*. *Oare nu mai există gravitația* ? *Oare forța pe care o exercită aerul învinge gravitația* ?



Răspunsul la ambele întrebări este negativ : gravitația este aproape la fel de intensă ca la suprafața Pământului, iar forța exercitată de aer este şi ea cam aceeaşi ca şi în camera unde ne aflăm. *Atunci, ce mai putem **şti sigur** şi ce nu* ?

Un răspuns pe care posibil este că :

Rezultatul unei experiențe de mecanică poate depinde de sistemul de referință în care ne aflăm.

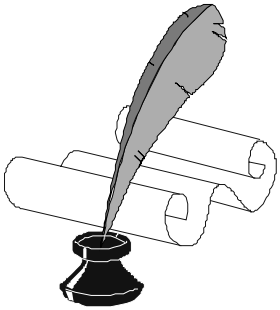
BIOGRAFIA DE LA PAGINA 59

Isaac Newton este născut pe 25 decembrie 1642, la Woolsthorpe, Lincolnshire, Anglia şi moare pe data de 20 martie 1727, la Londra. În semn de prețuire a activității sale a fost înobilat, iar locul său de veci este la Westminster Abbey.

Este cunoscut ca fizician şi matematician. A mai studiat teologia şi alchimia.

În cazul nostru, efectuând experiențe cu mucul de țigară într-o cameră oarecare, la suprafața Pământului, vom observa mereu că el cade dacă este lăsat din mână, sau rămâne nemişcat când este în scrumieră. Pe de altă parte, experiențele efectuate pe stația orbitală vor arăta mereu că mucul de țigară nu cade atunci când este lăsat din mână. Prin urmare, există sisteme de referință în care acțiunea unei singure forțe, în particular gravitația, determină schimbarea stării de mişcare a corpului şi sisteme de referință în care acțiunea aceleiaşi forțe nu provoacă schimbarea stării de mişcare.

Altfel spus, există sisteme de referință în care schimbarea stării de mişcare a unui corp nu se poate face de la sine şi presupune acțiunea măcar a unei singure forțe, după cum există şi sisteme de referință în care schimbarea stării de mişcare poate avea loc de la sine, fără acțiunea vreunei forțe.



Dacă ultima parte a afirmației vi se pare ciudată, închipuiți-vă că vă aflați într-un tren care frânează : obiectele aflate pe măsuța din compartiment vor porni brusc din loc, fără vreo cauză aparentă. Mai mult, trebuie să le aplicați o forță pentru a le sili să rămână în repaus !

Să recunoaştem că situația este destul de complicată !

Legile descoperite prin experiență par valabile doar în cazuri particulare.

De aceea apare ca legitimă întrebarea :

CUM S-AR PUTEA OARE CONSTRUI O TEORIE **GENERAL VALABILĂ** A MIŞCĂRILOR MECANICE, CÂND REZULTATELE EXPERIENȚELOR **DEPIND** DE SISTEMUL DE REFERINȚĂ ?

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 60

Marile merite ale lui Newton în domeniul fizicii constau în **formularea principiilor mecanicii** şi **descoperirea legii atracției universale**. Deşi primele idei le avusese în tinerețe, finalizarea acestora o face abia în 1686, când publică lucrarea „*Principiile matematice ale filosofiei naturale*”. În domeniul matematicii, este **inventatorul calculului diferențial şi integral**, alături de Leibniz.

Cel care a reuşit această performanță a fost marele fizician şi matematician englez **Isaac Newton**. Să urmărim în continuare esența teoriei sale.

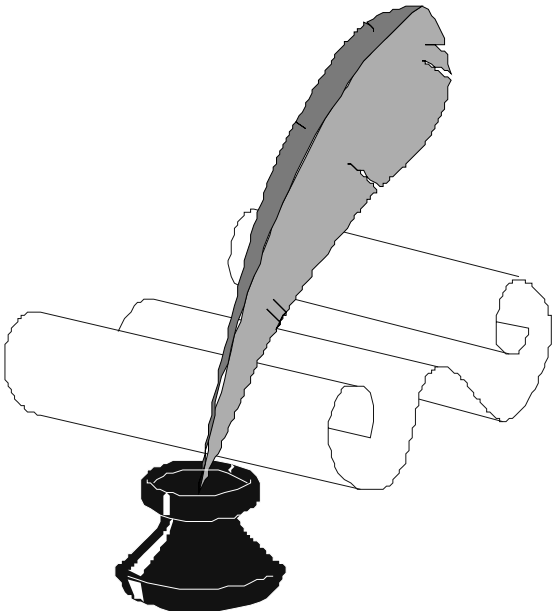
❖ În concepția newtoniană, **spațiul şi timpul sunt absolute**. Aceasta înseamnă că ele există independent de prezența sau absența materiei şi, în particular, a observatorului.

❖ În absența materiei, nu există motive ca un punct al spațiului să se deosebească de alt punct, sau ca timpul să se scurgă altfel într-o zonă a spațiului decât în alta.

❖ În consecință, **spațiul liber este omogen şi izotrop**, iar **timpul este universal**.

❖ Să presupunem acum că în Univers există un singur corp material. Evident, el este liber de orice influențe externe. *Cum se comportă el în această situație* ?

❖ Răspunsul „logic şi firesc”, pe care l-a dat Newton, este acela că **el îşi păstrează starea inițială de mişcare**, adică ori rămâne în repaus, ori se mişcă cu viteză constantă (are o mişcare rectilinie şi uniformă).



Evident, **nu putem proba prin experiență sau teoretic această ultimă afirmație**. Ceea ce putem demonstra experimental este doar că în anumite sisteme de referință, în condițiile în care influențele externe care se exercită asupra unui corp se anulează reciproc, corpul rămâne în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă. Ca exemplu, gândiți-vă la o carte care stă pe o masă în camera voastră. Ca un alt exemplu, imaginați-vă că este iarnă şi vă dați pe gheață. Distanța pe care alunecați este cu atât mai mare cu cât gheața este mai lucioasă. Dacă gheața ar fi perfectă şi dacă n-ar exista frecarea cu aerul v-ați mai opri vreodată sau ați mai reuşi să vă modificați direcția de mişcare?

PRECIZAREA DE LA PAGINA 61

În lipsa unei fundamentări teoretice, bazată pe legi superioare, generalizarea unor observații experimentale care conduc la aceeaşi concluzie poartă numele de **principiu**. Un principiu este considerat valabil în fizică atâta vreme cât el nu poate fi infirmat printr-o experiență.

ÎN LIPSA ACȚIUNILOR EXTERNE, UN PUNCT MATERIAL ÎŞI PĂSTREAZĂ STAREA DE MIŞCARE RECTILINIE UNIFORMĂ SAU DE REPAUS RELATIV.

PRINCIPIUL INERȚIEI

2.2.2. SISTEME DE REFERINȚĂ INERȚIALE ŞI SISTEME DE REFERINȚĂ NEINERȚIALE

Veți remarca : „*Bine, să acceptăm că experiențele pe care le facem la noi în cameră sau în laboratorul facultății nu par să contrazică acest principiu. Dar cum rămâne cu astronautul de pe stația orbitală* ?”. Aveți dreptate ! Pentru astronaut acest principiu nu este valabil ! Aceasta înseamnă că **există două mari clase de sisteme de referință** :

- **sisteme de referință inerțiale**, adică sistemele de referință în care este valabil principiul inerției
- **sisteme de referință neinerțiale**, adică sistemele de referință în care nu este valabil principiul inerției

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 62

În enunțul principiului inerției se foloseşte termenul **punct material**, care desemnează un corp a cărui mişcare poate fi reprezentată de mişcarea unui singur punct al său, în care se consideră concentrată întreaga sa masă. Pot fi considerate puncte materiale corpurile aflate în mişcare de translație sau corpurile de dimensiuni mici în raport cu distanțele care le separă de corpurile învecinate.

2.2.3. PRINCIPIUL FUNDAMENTAL AL DINAMICII

DISCUȚIA SE VA REFERI ÎN CONTINUARE DOAR LA SISTEMELE DE REFERINȚĂ INERȚIALE.

Experiențele ne arată, în aceste sisteme, că aplicarea unei forțe determină schimbarea stării de mişcare a corpului asupra căruia se acționează. Deci, efectul forței este unul dinamic : accelerarea corpului. Newton a ridicat la rang de principiu aceste observații experimentale.

SUB ACȚIUNEA UNEI FORȚE EXTERNE, UNUI PUNCT MATERIAL I SE IMPRIMĂ O ACCELERAȚIE AVÂND DIRECȚIA ŞI SENSUL FORȚEI, PROPORȚIONALĂ ÎN MODUL CU MODULUL FORȚEI ŞI INVERS PROPORȚIONALĂ CU MASA PUNCTULUI MATERIAL :

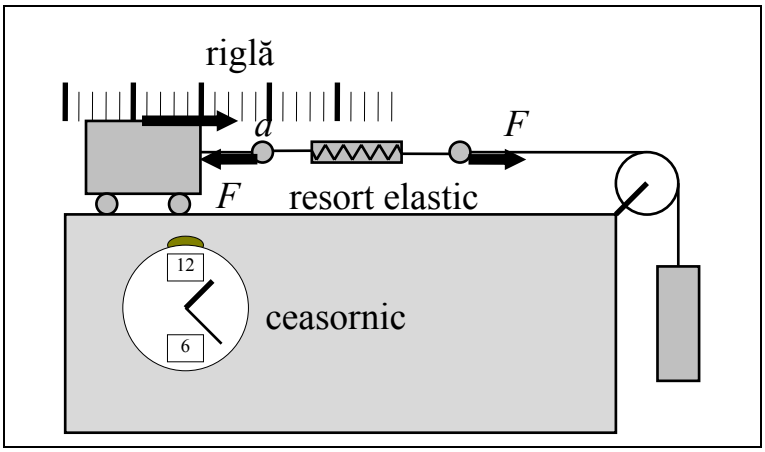
$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}}$$

PRINCIPIUL FUNDAMENTAL AL DINAMICII

COMENTARIUL DE LA PAGINA 63

Principiul fundamental transformă afirmația experimentală : „***de obicei***, *aplicând o forță determinăm accelerarea mişcării unui corp*” în afirmația general valabilă: „***întotdeauna***, *aplicând o forță determinăm accelerarea mişcării unui corp*”. **Consecința este aceea că dacă dorim să ne explicăm mişcarea trecută sau viitoare a corpurilor este suficient să cunoaştem forțele care acționează asupra lor la fiecare moment de timp**.

2.2.4. PRINCIPIUL ACȚIUNII ŞI AL REACȚIUNII



Să ne mai punem acum o întrebare : „*Putem verifica experimental principiul fundamental al mecanicii* ?”. Dacă insistăm să-l verificăm, am putea face experiența ilustrată în figura alăturată. Cu rigla măsurăm deplasarea căruciorului, iar cu ceasornicul durata necesară. Putem calcula astfel accelerația. Masa căruciorului o putem măsura separat. Înmulțind accelerația cu masa, ar trebui să găsim valoarea forței, indicată de alungirea resortului elastic. Pare corect, dar **nu este** ! *De ce* ? **Pentru că produsul dintre masă şi accelerație trebuie să fie egal cu forța care acționează asupra corpului, pe când forța măsurată de resortul elastic este aceea care acționează asupra lui însuşi** ! Veți spune : „*Da, dar corpul este cel care trage de resort cu forța măsurată, iar experiența indică că resortul, la rândul său, răspunde şi el corpului cu o forță*.”. Problema care se pune este : „***Sunt aceste două forțe egale în modul sau nu*** ?”. **Dacă răspunsul este *da*, atunci experiența descrisă poate fi folosită pentru verificarea principiului fundamental al dinamicii**, iar în caz contrar nu.

Poate din aceste motive, generalizând unele observații experimentale, Newton a socotit necesar să formuleze un **al treilea principiu al mecanicii clasice**, denumit **PRINCIPIUL ACȚIUNII ŞI REACȚIUNII**. Enunțul său este următorul :

DACĂ UN CORP ACȚIONEAZĂ ASUPRA UNUI ALT CORP CU O FORȚĂ (DENUMITĂ *ACȚIUNE*), AL DOILEA CORP RĂSPUNDE PRIMULUI CU O FORȚĂ (DENUMITĂ *REACȚIUNE*), AVÂND ACEEAŞI MODUL ŞI ACEEAŞI DIRECȚIE, DAR SENS CONTRAR.

PRINCIPIUL ACȚIUNII ŞI AL REACȚIUNII

COMENTARIUL DE LA PAGINA 64

Acceptând valabilitatea acestui principiu, acceptăm, implicit, posibilitatea măsurării simultane a accelerației unui corp şi a forței care determină această accelerație. Mai putem remarca faptul că acest principiu este „firesc şi logic”, în sensul în care stabileşte un soi de „democrație” în interrelația dintre două corpuri : nici unul dintre ele nu este „avantajat”. Dar, „firesc şi logic” nu înseamnă că principiul este şi demonstrat !

2.2.5. PRINCIPUL ACȚIUNII INDEPENDENTE A FORȚELOR SIMULTANE

Realitatea fizică din jurul nostru cuprinde nenumărate corpuri aflate în interacțiune. O carte aflată pe o masă înseamnă interacțiuni între ea şi masă, între ea şi aerul înconjurător, între ea şi Pământ, între filele ei… În aceste condiții, este greu de crezut că am putea găsi vreun corp asupra căruia să nu acționeze nici-o forță, sau, eventual, să acționeze o singură forță.

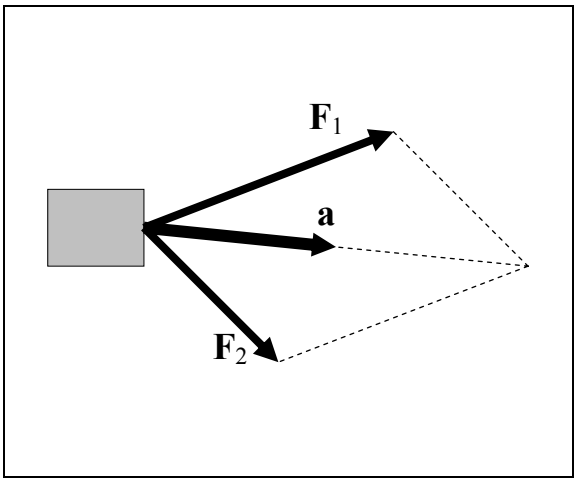
Dată fiind această situație ne mai putem pune alte două întrebări :

CE SE ÎNTÂMPLĂ DACĂ ASUPRA UNUI CORP ACȚIONEAZĂ SIMULTAN MAI MULTE FORȚE ?

ÎN CE MĂSURĂ ACȚIUNEA UNEI FORȚE ESTE „ALTERATĂ” DE ACȚIUNEA ALTEI FORȚE ?

Cele trei principii ale mecanicii nu oferă răspuns acestor întrebări.

De aceea, răspunsul nu poate fi determinat decât pe cale experimentală.



În figura alăturată se poate vedea schița unei experiențe care urmăreşte să clarifice aceste aspecte. Experiența se desfăşoară astfel :

❖ se acționează mai întâi cu forța F_1, separat. Se măsoară accelerația a_1 şi se determină direcția ei.

❖ se acționează apoi cu forța F_2, tot separat. Se determină în acelaşi mod caracteristicile accelerației a_2.

❖ se aplică simultan forțele F_1 şi F_2. Se măsoară accelerația a şi se determină direcția sa.

OMAGIUL DE LA PAGINA 65

Firea şi-ale Firii legi, zăceau sub văl nocturn, întunecat.
Să fie Newton!, zise Dumnezeu, iar totul fu străluminat.

Alexander Pope (1688–1744), poet englez.

Concluzia experienței este aceea că accelerația **a** este suma vectorială a accelerațiilor $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$.

Generalizarea acestei observații experimentale formează ultimul principiu al mecanicii clasice.

ACCELERAȚIA MIŞCĂRII UNUI PUNCT MATERIAL, SUPUS SIMULTAN ACȚIUNII MAI MULTOR FORȚE, ESTE NUMERIC EGALĂ CU SUMA VECTORIALĂ A ACCELERAȚIILOR PE CARE LE-AR IMPRIMA FIECARE DINTRE FORȚE ACȚIONÂND SEPARAT:

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_1}{m} + \frac{\mathbf{F}_2}{m} + \ldots}$$

PRINCIPIUL ACȚIUNII INDEPENDENTE A FORȚELOR SIMULTANE

În calcule, este mai comod să utilizăm o combinație între principiul fundamental al dinamicii şi principiul acțiunii independente a forțelor simultane. Astfel, observăm că :

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_1}{m} + \frac{\mathbf{F}_2}{m} + \ldots \quad \Leftrightarrow \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots$$

COMENTARIUL DE LA PAGINA 66

Şi acest principiu are calitatea de a extinde domeniul faptelor despre care „ştim sigur” ceva. Conform principiului acțiunii independente a forțelor simultane, expresia matematică a formulei unei anumite forțe nu se modifică dacă, în loc să acționeze singură, această forță acționează concomitent cu alte forțe. Cu alte cuvinte, **modul de acțiune al unei forțe nu este alterat prin prezența altor forțe**.

Comparând cu expresia principiului fundamental :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

rezultă că suma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ...$ are semnificația unei unice forțe, denumită **forța rezultantă** şi notată cu **R**. De aceea, putem enunța combinația celor două principii astfel :

Produsul dintre masa şi accelerația unui punct material este numeric egal cu forța rezultantă care acționează asupra punctului material :
$m\mathbf{a} = \mathbf{R}$

Prin **forța rezultantă** înțelegem suma vectorială a tuturor forțelor care acționează simultan asupra punctului material. Această relație vectorială este echivalentă, în general, cu trei ecuații scalare, câte una pentru fiecare dintre axele de coordonate:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ma_x = R_x = F_{1x} + F_{2x} + ... \\ ma_y = R_y = F_{1y} + F_{2y} + ... \\ ma_z = R_z = F_{1z} + F_{2z} + ... \end{cases}$$

2.3. CÂND SUNT VALABILE PRINCIPIILE DINAMICII ?

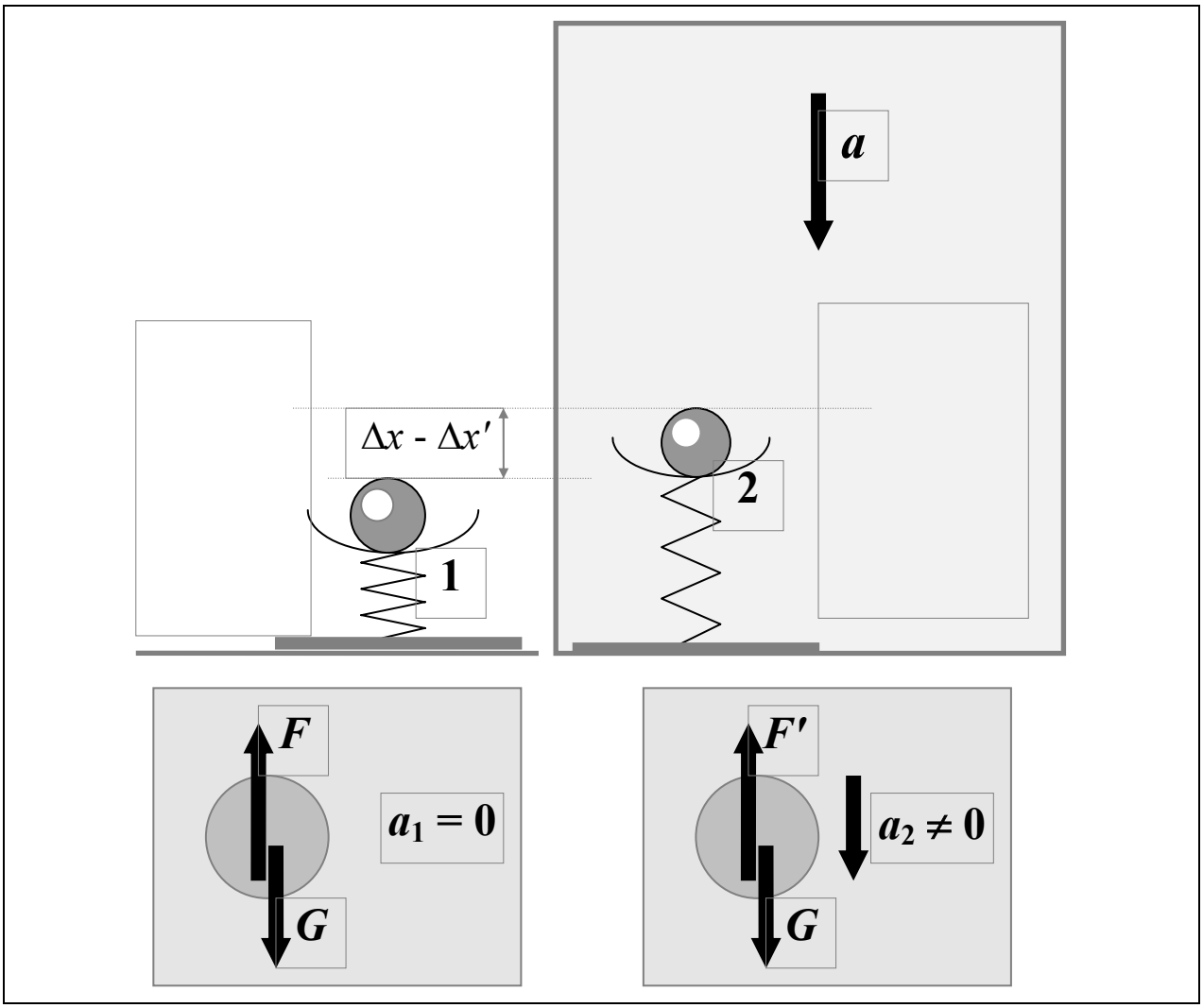
Să considerăm două sisteme fizice identice, format fiecare dintr-o bilă grea, aşezată pe talerul unui cântar cu arc. Unul din sisteme este plasat pe sol, iar celălalt într-un ascensor care coboară cu accelerația constantă a (figura de pe pagina următoare). Există şi doi observatori : unul plasat pe sol, iar celălalt în sistemul de referință al ascensorului. Față de observatorul de pe sol, bila **1** este în repaus : $a_1 = 0$, iar bila **2** coboară cu aceeaşi accelerație ca şi ascensorul : $a_2 = a$. Experiențele făcute într-un sistem de referință legat de sol confirmă principiul inerției. De aceea, observatorul de la sol poate aplica principiile mecanicii pentru a explica mişcările celor două bile. Mai întâi, el va face o listă a forțelor care acționează asupra bilelor. În ambele cazuri, trebuie să ia în considerație forța de atracție a Pământului, adică greutatea, forța cu care acționează talerul, ca răspuns la deformarea resortului, şi poate neglija acțiunea aeru-

PROBLEMA DE LA PAGINA 67

Fiind date două forțe egale în modul, care este condiția ca rezultanta lor să fie nulă ? Aceeaşi întrebare şi pentru cazurile în care sunt date trei, respectiv patru forțe egale în modul.

lui înconjurător. Conform principiului acțiunii independente a forțelor simultane, el calculează forțele rezultante :

$$\mathbf{R} = \mathbf{G} + \mathbf{F} \qquad ; \qquad \mathbf{R}' = \mathbf{G} + \mathbf{F}'$$



Reducând sistemul de forțe la o singură forță, el poate aplica principiul fundamental al dinamicii:

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}_1 \qquad ; \qquad \mathbf{R}' = m\mathbf{a}_2$$

Exprimând greutatea în funcție de accelerația gravitațională şi forța exercitată de taler în funcție de deformare, el obține :

$$m\mathbf{a}_1 = m\mathbf{g} - k\Delta\mathbf{x} \qquad ; \qquad m\mathbf{a}_2 = m\mathbf{g} - k\Delta\mathbf{x}'$$

CUGETAREA DE LA PAGINA 68

Toată ştiința este fie fizică, fie colecție de timbre.

Ernest Rutherford (1871–1937), fizician

Alegând un sistem de coordonate cu o axă paralelă cu accelerația ascensorului, el obține câte o singură ecuație scalară:

$$0 = mg - k\Delta x \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x = \frac{mg}{k}$$

$$ma = mg - k\Delta x' \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x' = \frac{m(g-a)}{k} < \Delta x$$

Rezultatul confirmă observația experimentală : arcul cântarului din ascensor este mai puțin comprimat decât acela al cântarului de pe sol. Altfel spus, bila din ascensor *pare* mai ușoară decât aceea de la sol ! Mai mult, dacă ascensorul ar cădea liber, adică dacă $a = g$, comprimarea $\Delta x'$ ar fi nulă, ceea ce ar însemna că bila nu se mai sprijină pe taler și are o greutate aparentă nulă ! Cu alte cuvinte, bila *ar pluti* în interiorul ascensorului !

Observatorul aflat în ascensor vede bila din ascensor stând în repaus față de el. Rezultă că accelerația acestei bile față de ascensor este nulă : $a_2' = 0$. Cu toate acestea, forțele care acționează sunt tot greutatea mg și forța de răspuns a talerului $k\Delta x'$. Încercând să aplice principiile mecanicii, observatorul din ascensor ar ajunge la ecuația :

$$ma_2' = mg - k\Delta x'$$

sau :

$$m \cdot 0 = ma \quad \Leftrightarrow \quad 0 = a$$

Concluzia este, evident**, falsă** !

DE CE, APLICÂND ACELEAȘI PRINCIPII CA ȘI OBSERVATORUL DE LA SOL, OBSERVATORUL DIN ASCENSOR OBȚINE UN REZULTAT ERONAT ?

Răspunsul nu poate fi decât unul :

Principiile mecanicii nu sunt valabile în ascensor ! Deci ascensorul este un sistem de referință neinerțial.

Rezultatul observatorului din ascensor ar fi corect doar dacă accelerația ascensorului ar fi nulă : $a = 0$, adică dacă ascensorul ar avea cel mult o mișcare rectilinie uniformă în raport cu solul.

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 69

Fie cazul ipotetic în care ascensorul se deplasează un timp nedefinit cu accelerație constantă (accelerația gravitațională fiind de asemenea constantă) și în care observatorul din ascensor nu are cunoștință despre existența și observațiile experimentale ale observatorului de la sol. Întrebarea este : există posibilitatea ca el să realizeze că se află într-un sistem de referință neinerțial ?

Din acest exemplu putem extrage o concluzie importantă :

Fiind dat un sistem de referință inerțial :

- Toate sistemele de referință aflate în mişcare accelerată față de el sunt neinerțiale.
- Toate sistemele de referință aflate în mişcare rectilinie uniformă față de el sunt inerțiale.

Tot acest exemplu ne mai poate sugera o concluzie interesantă. Să spunem că deformarea arcului cântarului de la sol este $\Delta x = 3$ cm şi că accelerația ascensorului este doar o sutime din accelerația gravitațională: $a = g/100$. Să calculăm deformarea resortului din ascensor :

$$\Delta x' = \frac{m(g-a)}{k} = \frac{mg}{k}\cdot\left(1-\frac{a}{g}\right) = \Delta x\left(1-\frac{a}{g}\right) = 3\,\text{cm}\cdot 0{,}99 = 2{,}97\ \text{cm}$$

Diferența dintre valorile deformărilor este de doar 0,3 mm. În lipsa unor instrumente de măsură foarte precise această diferență nu poate fi, practic, pusă în evidență. *Ce rezultă de aici* ? Răspunsul este că, în acest caz, experiența, *în limitele erorilor de măsură*, nu poate face distincția între sistemul de referință al ascensorului şi acela legat de sol. Cu alte cuvinte, observatorul din ascensor poate fi şi el considerat, *în limitele preciziei experimentale*, observator inerțial.

Această observație ne permite să înțelegem de ce Pământul poate fi considerat în mod obişnuit sistem de referință inerțial.

În adevăr, în raport cu spațiul newtonian absolut, Pământul se mişcă accelerat (poate şi numai pentru că se roteşte în jurul Soarelui sau în jurul propriei axe). Accelerația este, însă, suficient de mică pentru ca în multe situații practice rezultatul calculelor, făcute în ipoteza că Pământul este sistem de referință inerțial, să nu difere, practic, de rezultatele măsurătorilor experimentale.

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 70

Observatorul din ascensor poate justifica rezultatul experimental pe care-l obține pe mai multe căi : fie consideră că accelerația gravitațională are o valoare mai mică, fie consideră că resortul are o constantă de elasticitate mai mare, fie crede că masa corpului de pe cântar este mai mică. Întrebarea este : care dintre aceste ipoteze de lucru vi se pare mai rezonabilă ?

2.4. FORȚE DE INERȚIE

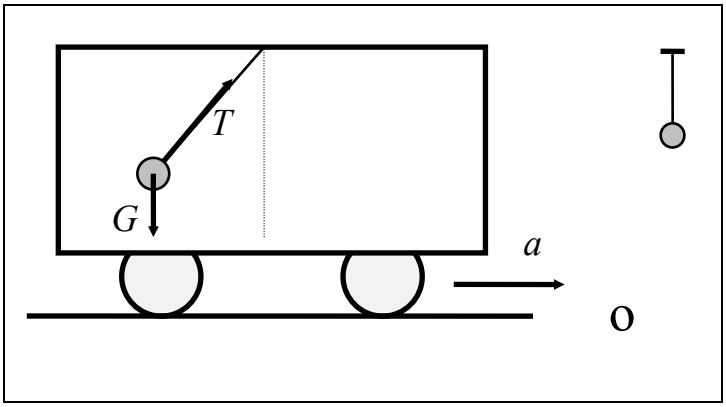
Ai un sentiment de siguranță atunci când priveşti la un *montagne russe* : este un obiect masiv, ancorat solid în pământ. Senzațiile tari vin abia atunci când te urci în trenuleț şi parcurgi traseul. Forțe neaşteptate te țintuiesc pe scaun, sau, dimpotrivă, par să te lase fără greutate. Ne putem întreba : *de ce oare se petrec lucruri atât de ciudate într-un montagne russe ?*.

Motivul este legat, în primul rând, de experiența noastră de viață. „Ciudățenia" constă de fapt în aceea că în mod normal nu încercăm asemenea trăiri. În al doilea rând, în mod obiectiv, diferența principală este dată de sistemul de referință față de care ne aflăm în repaus. Pe scurt, în trenuleț fiind, **suntem plasați într-un sistem de referință neinerțial**, în care principiile dinamicii nu mai sunt valabile. Într-un asemenea sistem, multe din explicațiile pe care le dăm în mod curent unor fenomene îşi pierd valabilitatea.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 71

Fizica este mult prea grea pentru fizicieni.

David Hilbert (1862–1943), matematician şi filosof german



Pentru a înțelege mai bine, să analizăm un alt exemplu :

Observatorul **O**, aflat pe sol, vede un vagon care se deplasează accelerat (figura alăturată). În vagon este un pendul gravitațional, format dintr-un mic corp, atârnat printr-un fir de tavanul vagonului. Observatorul **O** remarcă că micul corp își păstrează poziția în raport cu vagonul, deci corpul are aceeaşi accelerație ca şi vagonul. Pe de altă parte, firul de care atârnă corpul este înclinat față de verticală cu un anumit unghi. *Este înclinarea firului explicabilă* ? La prima vedere, poziția firului nu se justifică. *De ce* ? Pentru că firul aflat în repaus în sistemul de referință al observatorului atârnă vertical, indicând direcția forței de greutate. **La o analiză mai atentă, în care utilizăm principiile dinamicii, poziția pendulului din vagon este perfect justificabilă**. Iată cum :

❖ forțele care determină mişcarea corpului ataşat firului sunt două: **greutatea**, respectiv **tensiunea**, orientată pe direcția firului

❖ corpul are o mişcare accelerată, caracterizată de acelaşi vector accelerație ca şi acela al mişcării vagonului

❖ conform principiilor dinamicii se poate scrie ecuația vectorială de mişcare :

$$\mathbf{G} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$$

❖ alegând axa *Ox* în direcția şi sensul accelerației, obținem două proiecții ale ecuației precedente :

$$\begin{cases} T_x = ma \\ T_y - mg = 0 \end{cases}$$

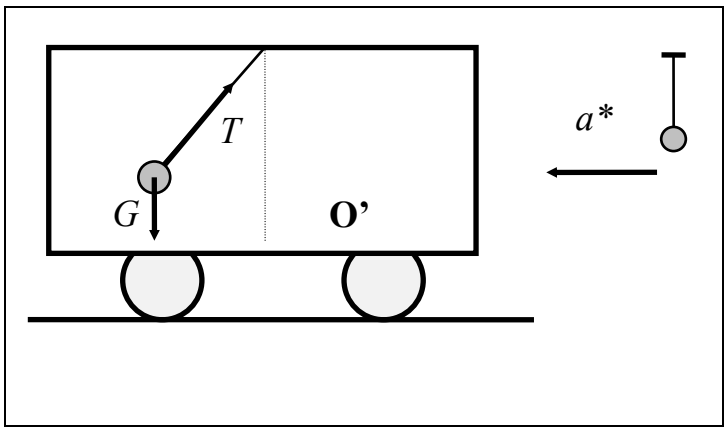
❖ tangenta unghiului făcut de fir cu verticala este numeric egală cu raportul dintre componenta pe axa *Ox* a tensiunii şi componenta pe axa *Oy*:

$$tg\,\theta = \frac{T_x}{T_y} = \frac{a}{g}$$

❖ înclinarea firului este cu atât mai accentuată cu cât accelerația vagonului este mai mare. Mai mult, dacă pendulul nu are mişcare accelerată în raport cu observatorul, unghiul de înclinare este nul, ceea ce justifică şi poziția pendulului în repaus.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 72

Dacă urmăriți acest calcul şi nu ştiți nimic despre forța pe care o numesc „tensiune”, gândiți-vă că ea este forța elastică exercitată de un resort cu constantă de elasticitate foarte mare, atât de mare încât întinderea resortului este prea puțin observabilă.



Ecuațiile pe care le-ar obține observatorul din vagon (figura alăturată), urmând aceeaşi cale de rezolvare, ar fi :

$$\begin{cases} T_x = 0 \\ T_y - mg = 0 \end{cases}$$

Diferența provine din faptul că *în raport cu el* corpul atârnat de fir nu are accelerație, adică $a' = 0$. **Conform celor două ecuații unghiul de înclinare θ ar trebui să fie nul, dar experiența contrazice această afirmație** !

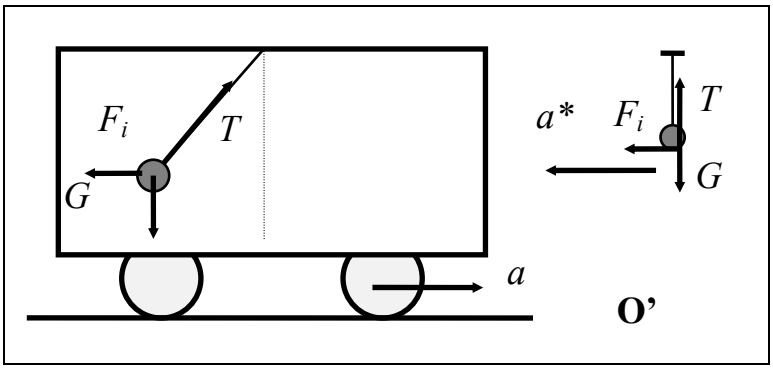
Ajunşi în acest punct, ne putem pune unele întrebări legitime :

SĂ FIE FIZICA ŞI LEGILE EI VALABILE DOAR PENTRU OBSERVATORII DIN SISTEMELE INERȚIALE ?

DACĂ ESTE AŞA, CE SE ÎNTÂMPLĂ CU OBSERVATORII CARE TRĂIESC ÎN SISTEME NEINERȚIALE ?

MAI AU EI ŞANSA DE A CUNOAŞTE LEGILE NATURII ?

Răspunsurile la aceste întrebări sunt dificile, iar pe baza lor se pot, poate, construi întregi teorii. Totuşi, **există o cale facilă de a simplifica lucrurile**, valabilă în condițiile menționate în diagrama de pe pagina următoare.



Să vedem cum funcționează această metodă în cazul observatorului din vagonul discutat anterior. El trebuie să cunoască principiile dinamicii, să ştie despre forța de greutate şi despre tensiunea cu care acționează firul şi, în plus, să cunoască accelerația pe care o are în raport cu observatorul inerțial. Aceste condiții fiind îndeplinite, el va scrie următoarea ecuație vectorială de mişcare pentru pendulul din vagon (vezi şi figura) :

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 73

Să presupunem că puteți fi pe rând fie observatorul de pe sol, fie cel din vagon. Întrebarea este : în cele două situații, simțurile voastre ar indica o diferență sau nu ?

IPOTEZE

Legile fizicii sunt cunoscute într-un sistem de referință inerțial

Observatorul din sistemul neinerțial cunoaşte şi el aceste legi

Observatorul din sistemul neinerțial cunoaşte accelerația pe care o are el în raport cu sistemul inerțial

TRUC

Pe lângă acțiunea forțelor reale asupra corpurilor, se consideră şi unele forțe imaginare, numite **forțe de inerție** sau **forțe complementare**

Forțele de inerție sunt proporționale cu masa corpului considerat şi cu accelerația observatorului neinerțial în raport cu acela inerțial, au direcția acestei accelerații şi sens opus

REZULTAT

Observatorul din sistemul **neinerțial poate aplica principiile dinamicii**, obținând rezultate comparabile cu acelea ale observatorului inerțial !

$$\mathbf{G}+\mathbf{T}+\mathbf{F}_i = m\mathbf{a}' \quad ; \quad a'=0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G}+\mathbf{T}+\mathbf{F}_i = 0$$

Conform definiției forței de inerție, el obține :

$$\mathbf{G}+\mathbf{T}+\left(-m\mathbf{a}\right)=0$$

Proiectând pe axe, rezultă: $\begin{cases} T_x - ma = 0 \\ T_y - mg = 0 \end{cases}$

Cele două ecuații îl duc la aceeaşi concluzie ca şi pe observatorul inerțial:

$$tg\,\theta = \frac{T_x}{T_y} = \frac{a}{g}$$

Mai mult, analiza pendulului aflat în repaus față de observatorul inerțial conduce la următoarele concluzii :

$$\mathbf{G}+\mathbf{T}+\mathbf{F}_i = m\mathbf{a}^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{G}+\mathbf{T}+\left(-m\mathbf{a}\right)=m\mathbf{a}^* \quad \Rightarrow \begin{cases} -ma = -ma^* \\ T - mg = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a^* = a \\ T = mg \end{matrix}$$

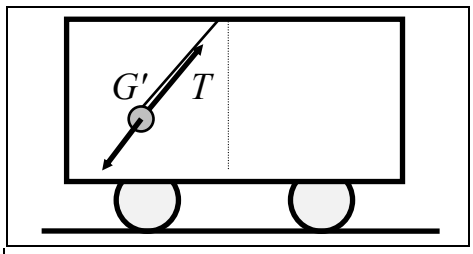
Rezultatul însemnă că firul are poziție verticală, iar corpul se apropie de el cu accelerație egală cu aceea a vagonului, având aceeaşi direcție, dar sens opus față de aceasta. Ambele concluzii sunt corecte şi coincid cu acelea ale observatorului inerțial.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 74

Trucul forțelor de inerție constă, matematic, în trecerea factorului care conține accelerația în ecuația mişcării pentru observatorul inerțial în celălalt membru, rezultând astfel ecuația de mişcare pentru observatorul neinerțial. Acest factor, luat cu semn schimbat, este numit „*forță*” de inerție. **Forța de inerție nu este o forță în adevăratul înțeles al cuvântului**, **ci doar un nume pentru factorul** : **-*m*a**. **Nefiind o forță adevărată, o forță reală, forța de inerție nu are reacțiune** şi deci nu se supune principiului acțiunii şi al reacțiunii.

Un subiect de reflexie

Ați remarcat, poate, că întrebările „*Să fie fizica şi legile ei valabile doar pentru observatorii din sistemele inerțiale* ? *Şi dacă este aşa, ce se întâmplă cu observatorii care trăiesc în sisteme neinerțiale* ? *Mai au ei şansa de a cunoaşte legile naturii* ?” nu şi-au găsit nici-un răspuns deoarece **utilizarea forțelor de inerție presupune cunoaşterea tuturor informațiilor pe care le are observatorul inerțial şi deci o comunicare între observatorul inerțial şi acela neinerțial**. Dacă această comunicare nu există, observatorul neinerțial nu are acces la datele necesare pentru a explica fenomenul. De fapt, chiar în exemplul dat, utilizarea **forței de greutate**, ca **forță verticală**, este datorat informației care vine de la observatorul inerțial şi este acceptat pentru că, în realitate, un observator care să se deplaseze toată viața într-un vagon aflat în mişcare rectilinie uniform variată nu există. Observatorul din vagon ar fi trebuit mai întâi să construiască vagonul, să se urce în el şi să-l pună în mişcare. În tot acest timp el ar fi trăit în sistemul de referință al Pământului, percepând greutatea ca o forță orientată vertical. În vagon fiind, el nu ar putea renunța la această concepție.



Dar, să presupunem prin absurd că ar exista un observator care a trăit toată viața în acest vagon şi nu a putut comunica cu exteriorul. Cum ar fi fizica experimentală pe care o cunoaşte el ? Nu foarte diferită de aceea a noastră ! Pentru el toate obiectele ar cădea după o direcție paralelă cu firul (vezi şi figura alăturată). Deci, direcția *sa* „verticală” ar diferi de direcția *noastră* verticală, iar valoarea accelerației de cădere liberă ar fi diferită de aceea a noastră :

$$g' = \sqrt{g^2 + a^2}$$

Două întrebări care se pot pune analizând definiția forțelor de inerție sunt următoarele :

DE CE SĂ LE ÎNTREBUINȚĂM, DACĂ UTILIZAREA LOR FACE NECESARĂ FOLOSIREA DATELOR DE CARE DISPUNE DOAR OBSERVATORUL INERȚIAL ?

NU ESTE MAI BINE SĂ NE PUNEM ÎNTOTDEAUNA ÎN SITUAȚIA ACESTUIA ?

COMENTARIUL DE LA PAGINA 75

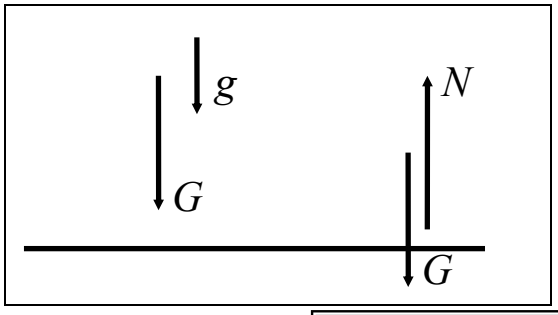
În secolul XVIII, d’Alembert a enunțat un principiu care-i poartă numele şi care era menit să înlocuiască principiul fundamental al dinamicii. Conform acestuia, este valabilă relația : **F** - *m***a** = 0. Cu alte cuvinte, un corp este în echilibru sub acțiune forței reale **F** şi a forței imaginare –*m***a**. În esență, principiul reduce o problemă de dinamică la una de statică.

Răspunzând la a doua întrebare, eu v-aş sfătui să NU VĂ COMPLICAȚI UTILIZÂND FORȚE DE INERȚIE ! Punctul de vedere al observatorului inerțial este foarte uşor de imaginat, pe când acela al observatorului neinerțial este mai greu de înțeles.

Totuşi, există două motive care conduc la folosirea forțelor de inerție : unul mai curând istoric şi altul care ține de o eroare de percepție a noastră. Motivul istoric este legat de cunoştințele de fizică ale Antichității : anticii puteau rezolva cu uşurință probleme de statică (sau de echilibrul forțelor pentru corpuri în repaus, dar nu ştiau să rezolve probleme de dinamică (adică, în fond, probleme de mişcare accelerată). Forțele de inerție permit tocmai reducerea unei probleme de dinamică la una de statică, mai familiară fizicienilor, pe vremuri, decât cea dintâi.

Al doilea motiv, cel legat de percepția eronată, percepție pe care o avem şi când ne aflăm în *montagne russe*-ul despre care discutam la începutul lecției.

Ca să înțelegem ideea de „percepție eronată”, să privim mai întâi figura alăturată. Ea ar putea reprezenta ceva extrem de „familiar” şi „firesc” : o fetiță într-o maşină de spălat. Brrr ! Nu v-aş dori să fiți în pielea ei dacă centrifuga maşinii ar fi pusă în funcțiune ! **Ați simți o forță formidabilă care vă împinge <u>către</u> pereții cuvei**. Această forță este botezată „*forță centrifugă de inerție*”. Dar, *există ea* ? Păi, aici e problema ! **Forța centrifugă de inerție nu există** ! Repet, ea este senzația pe care ar avea-o cineva aflat în maşina de spălat. De ce doar o senzație ? Să încercăm să lămurim acest lucru.



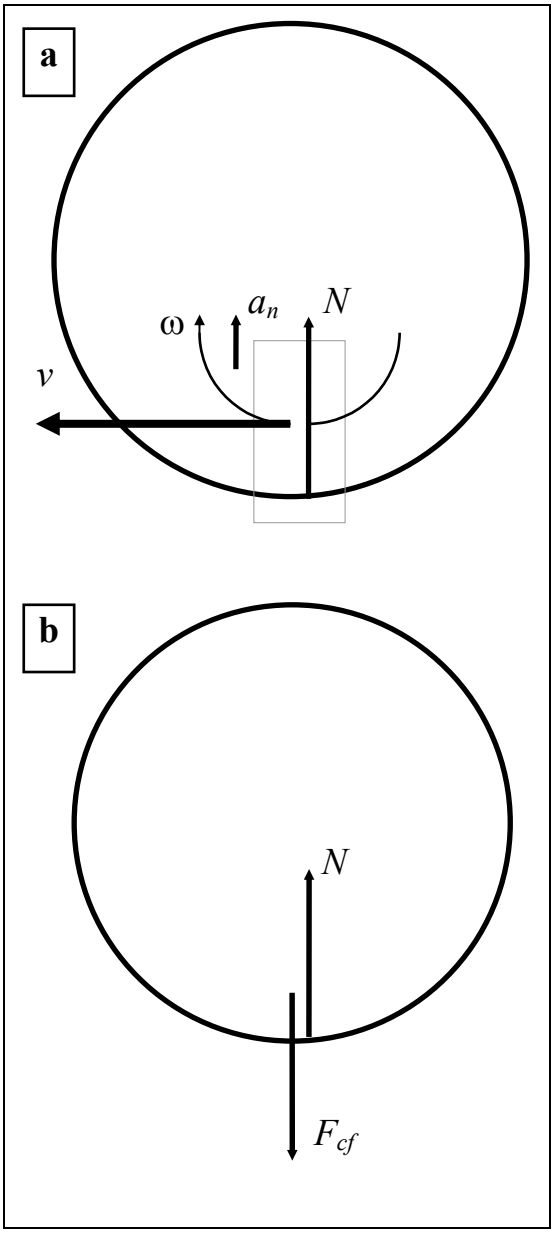
Să privim figura alăturată : există doi oameni, dintre care unul cade liber, iar celălalt stă pe o suprafață plană. *Care dintre ei **simte** că „are greutate”* ? Evident, doar acela care stă pe suprafața plană. Senzația de „greutate” este cauzată, de fapt, de acțiunea conjugată a două forțe : greutatea şi reacțiunea normală.

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 76

Interacțiunea între două corpuri **A** şi **B** este o relație cauză-efect : cauza = corpul **A** acționează asupra lui **B** cu o forță, efect = corpul **B** este accelerat. Principiul al treilea ne asigură că şi reciproca acestei afirmații este adevărată. Ca exemplu, când se trage cu puşca pe lângă viteza imprimată glonțului apare şi reculul armei. Întrebarea este : aflându-vă într-un vehicul care frânează brusc şi simțind efectele forței de inerție, puteți identifica „obiectul” responsabil de această forță şi reculul lui ?

Cu alte cuvinte, ne dăm seama că avem greutate doar pentru că suprafața de sprijin acționează asupra noastră cu forța de reacțiune normală.

De aici provine şi **generalizarea pe care o facem inconştient** : **dacă o suprafață acționează asupra noastră, acest fapt se petrece numai pentru că există „ceva" sau „cineva" care <u>ne împinge</u>** (ca şi greutatea) **<u>către</u> acea suprafață**. În orice caz, **nu considerăm** acea suprafață de vină, adică **că <u>ea ne împinge</u>**.



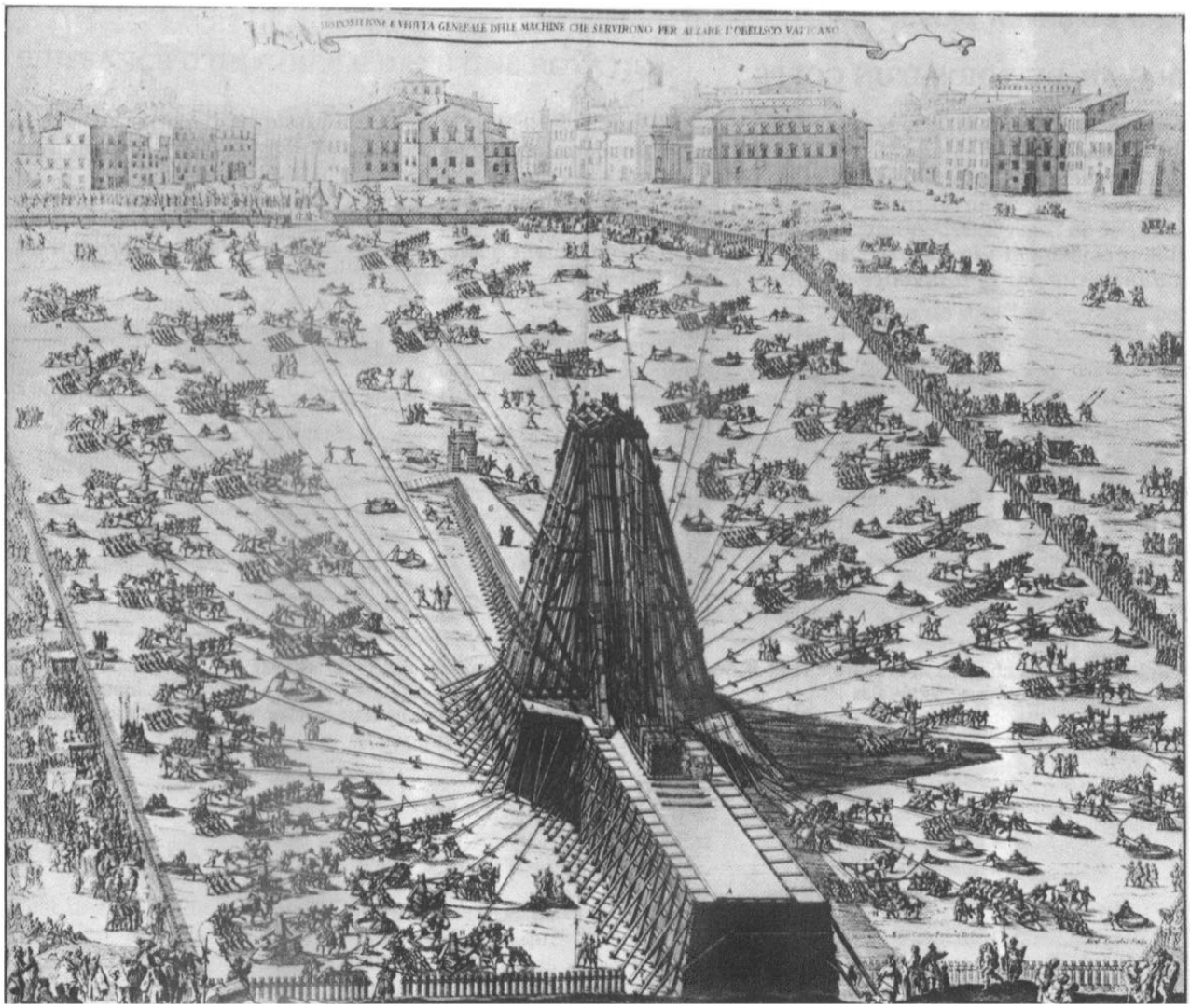
Să ne imaginăm acum o maşină de spălat gigantică, aflată undeva în spațiul cosmic, unde forța de gravitație nu mai acționează (figura alăturată **a**). Personajul aflat în cuvă, rotindu-se odată cu aceasta, are la un moment dat o anumită viteză liniară *v*. Conform principiului inerției, în absența oricărei forțe externe, el tinde să se deplaseze rectiliniu uniform în direcția şi sensul vitezei momentane. *Ce va păți* ? Va păți acelaşi lucru ca şi vectorul viteză din figură : ar trebui să treacă *prin* peretele cuvei ! Evident, **peretele se opune cu o forță: forța normală**. Aceasta determină accelerația normală a omului, care, astfel, continuă să se rotească odată cu cuva.

La rândul său, omul se consideră în repaus şi, simțind reacțiunea normală a peretelui, conform ideii că pentru ca acest fapt să se petreacă este necesar să existe „**ceva**" care să-l împingă către perete, va considera că **acest „ceva" este forța centrifugă de inerție** (figura alăturată, **b**). Situații similare întâlnim şi când ne aflăm într-un mijloc de transport care accelerează, frânează sau se deplasează pe o curbă. În toate aceste cazuri, pretindem că o forță de inerție ne împinge în spate, în față sau înspre exteriorul curbei. De fapt, această forță nu există. Noi tindem să ne păstrăm starea de mişcare rectilinie uniformă, iar mijlocul de transport este acela ce ne-o ia înainte, în spate sau vine cu peretele lateral în întâmpinarea noastră.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 77

„Maşina de spălat" din spațiul cosmic ar putea fi o stație spațială, de forma unui tor, care rotindu-se în jurul axei de simetrie ar beneficia de gravitație artificială : forța de inerție ar împinge locuitorii stației spre exteriorul torului acționând oarecum asemănător cu forța gravitațională.

2.5. TIPURI DE FORȚE



Fotografia de mai sus vă înfățișează ridicarea obeliscului din piața Sfântul Petru din Roma. O mie de oameni au muncit împreună pentru a duce la bun sfârșit acțiunea. Motivul pentru care vă prezint imaginea este acela că studiind-o atent ați putea găsi toate tipurile de forțe despre care vom vorbi în continuare : greutate, tensiune, forță elastică, forțe normale, forță de frecare, etc.

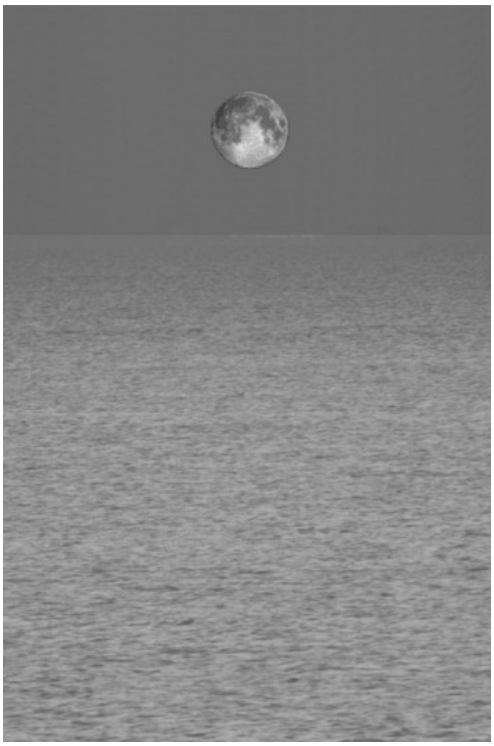
✍ În mecanică, forțele sunt de două tipuri : **forțe cu acțiune de la distanță** și **forțe de contact**.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 78

Împărțirea în aceste două categorii a forțelor este una strict operațională, utilă atunci când neglijăm compoziția microscopică a materiei. Fizica actuală nu poate afirma că la nivel microscopic componentele materiei se pot afla vreodată în contact direct.

2.5.1. FORȚE CU ACȚIUNE DE LA DISTANȚĂ

2.5.1.1. Forța gravitațională, legea atracției universale



Vă puteți întreba ce au în comun fotografiile de mai sus. *Ce asemănare există între Lună şi un măr* ? *Dar ce legătură există între acestea şi ordinea cosmică* ? Răspunsul la aceste întrebări este cuprins într-o legendă referitoare la Isaac Newton. Se spune că el stătea întins sub un măr, în grădina sa, şi privea Luna pe cer. Pe neaşteptate, un măr s-a desprins de pom şi i-a căzut în cap. Un altul ar fi trecut uşor peste această întâmplare, dar Newton şi-a pus o întrebare : *de ce mărul cade şi Luna nu cade* ? *Ce deosebeşte cele două corpuri* ? Gândindu-se, a ajuns la concluzia că, în fond, **cele două corpuri nu se deosebesc prea mult** : Luna ar putea fi un măr mare, iar

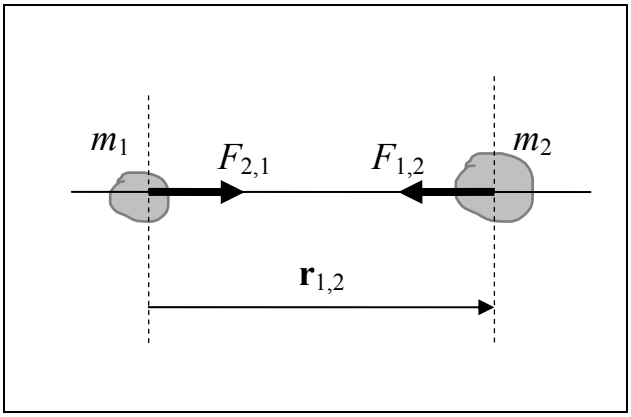
MĂRTURIA DE LA PAGINA 79

Pe 15 aprilie 1726 îi fac o vizită lui Sir Isaac…îmi spune că se află în aceeaşi situație ca atunci când, mai demult, îi venise în minte ideea gravitației. Aceasta era provocată de căderea unui măr, pe când era cufundat într-o stare de contemplație.

William Stukeley (1687–1765), doctor şi anticar englez

mărul o Lună mică. Şi pentru că nu există o deosebire esenţială între ele, **rezultă că Luna cade ca şi mărul** ! Aşa e : **Luna cade permanent, dar rămâne la aceeaşi distanţă faţă de Pământ, executând o mişcare circulară uniformă** ! Accelerația centripetă a mişcării de rotație a Lunii este de fapt accelerația căderii sale libere, în câmpul gravitațional al Pământului.

Pornind de la aceste considerente, utilizând principiile dinamicii şi legile lui Kepler, Newton ajunge la concluzia următoare :



Orice două corpuri materiale, având dimensiuni mici în raport cu distanța care le separă, se atrag cu o forță orientată pe direcția care unește centrele corpurilor, al cărei modul este proporțional cu produsul maselor lor şi invers proporțional cu pătratul distanței dintre centrele lor :

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1} = -k\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}^2}\frac{\mathbf{r}_{1,2}}{r_{1,2}}$$

Legea atracției universale

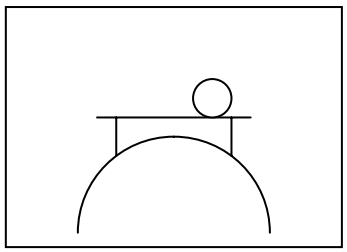
Constanta de proporționalitate k se numeşte **constanta atracției universale** sau **constanta gravitațională** şi are valoarea :

$$k = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$$

Valoarea constantei gravitaționale a fost măsurată pentru prima oară de chimistul şi fizicianul englez **Henry Cavendish**, în 1798. El a folosit în acest scop o balanță de torsiune.

Valoarea foarte mică a constantei gravitaționale face ca forța de atracție universală să nu fie resimțită, în mod curent, ca un mod de interacțiune între obiectele din jurul nostru. Astfel, două sfere din plumb, fiecare cu raza de un metru, ale căror centre se află la distanța de 10 m, se atrag cu o forță de 0,0015 N, în timp ce forța arhimedică pe care o exercită aerul asupra unei sfere este de 54 N, iar greutatea unei sfere este nu mai puțin de 464340 N.

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 80



Imaginea alăturată vă sugerează, evident cu mult exagerat, o bilă sferică aşezată pe o masă perfect plană, pe suprafața Pământului. Întrebarea este : bila ar trebui să rămână în echilibru sau nu ?

2.5.1.2. Greutatea

Greutatea unui corp este forța de atracție dintre acel corp şi Pământ.

Notând masa corpului cu *m*, masa planetei cu *M*, raza planetei cu *R* şi folosind legea atracției universale, rezultă :

$$\begin{cases} G = mg \\ G = k\dfrac{mM}{R^2} \end{cases} \Rightarrow \quad g = \frac{kM}{R^2}$$

Atunci când Henry Cavendish a măsurat constanta gravitațională cu ajutorul balanței de torsiune, s-a spus că el a cântărit Pământul ! Într-adevăr, cunoscând accelerația gravitațională, raza Pământului şi constanta gravitațională, se pot calcula masa şi densitatea medie ale Pământului :

$$M_P = \frac{9{,}81\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6400^2\ \text{km}^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} = 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

$$M_P = \rho_P V_P = \frac{4\pi R_P^3 \rho_P}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_P = \frac{3M_P}{4\pi R_P^3} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{4 \cdot 3{,}14 \cdot (6400\ \text{km})^3} = 5460\ \text{kg/m}^3$$

Greutatea aceluiaşi corp nu este aceeaşi în orice punct al Pământului. Există mai multe cauze care contribuie la acest fapt :

- Pământul nu este perfect sferic, raza sa la pol fiind puțin mai mică decât aceea la ecuator.
- Pământul nu este un sistem de referință perfect inerțial. Efectul rotației în jurul axei este resimțit ca acțiunea unei forțe centrifuge de inerție, care are valoarea cea mai mare la ecuator şi se anulează în dreptul polilor.
- Prezența unor zăcăminte poate afecta local accelerația gravitațională.

PROBLEMA DE LA PAGINA 81

Raza Lunii este de aproximativ 1750 km, iar densitatea sa medie este de 3350 kg/m^3. De câte ori este mai mică accelerația gravitațională la suprafața Lunii decât la suprafața Pământului ?

2.5.2. FORȚE DE CONTACT

Să ne concentrăm atenția asupra monedei evidențiate în figura de mai sus. Poziția sa este oarecum curioasă. Aşa cum ne indică umbra pe care o lasă pe suport, ea stă într-o poziție uşor înclinată. Cu toate acestea, moneda nu cade. *Cum ne putem explica acest fapt* ? Veți răspunde, desigur, că moneda rămâne în repaus pentru că forțele care acționează asupra ei îşi fac echilibrul. *Dar care sunt aceste forțe* ? *Ce ştim despre ele* ? La o primă analiză, putem fi siguri că una dintre forțele prezente este greutatea monedei şi că toate celelalte forțe care acționează au o rezultantă egală în modul cu greutatea, având aceeaşi direcție şi sens opus. Putem fi siguri şi că aerul înconjurător are o contribuție neglijabilă, date fiind densitatea mare a monedei şi faptul că ea este în repaus. De altfel, dacă am aşeza moneda în aceeaşi poziție, dar fără a o sprijini de un suport, ea ar cădea liber. De aici se poate trage o concluzie :

BIOGRAFIA DE LA PAGINA 82

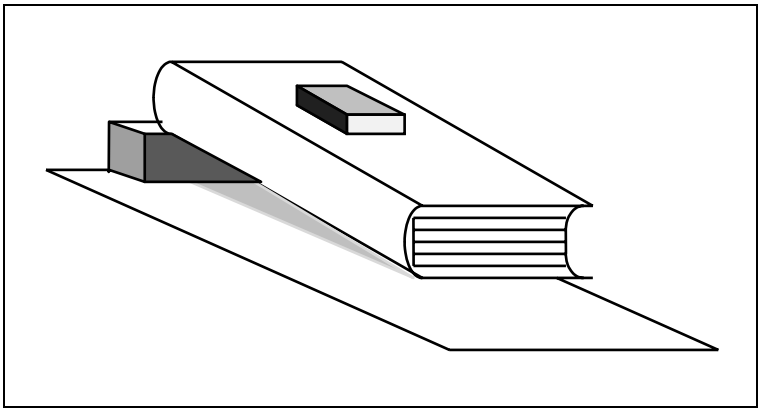
Henry Cavendish (1731 - 1810) : fizician şi chimist. A descoperit compoziția aerului şi a apei, natura şi proprietățile hidrogenului, a măsurat căldura specifică a unor substanțe. A făcut studii de electricitate. A măsurat masa şi densitatea Pământului prin metoda cunoscută sub numele de experimentul lui Cavendish.

Forțele care asigură echilibrul monedei, cu excepția greutății, sunt efectul interacțiunii între monedă şi suportul său. Mai mult, aceste forțe acționează doar dacă între monedă şi suport există un contact direct.

Forțele care se exercită între corpurile aflate în contact direct se numesc **forțe de contact** sau **forțe de legătură**.

Subiectele acestui capitol sunt consacrate studiului unei părți a forțelor de contact. Caracteristica lor generală este aceea că **nici una nu este o forță fundamentală**, aşa cum sunt forța gravitațională sau forța electrică. Forțele de legătură îşi au originea în interacțiunile dintre atomii sau moleculele corpurilor aflate în contact. În general, aceste interacțiuni sunt de natură electrică, dar pot avea şi alte cauze. Deci **forțele de legătură sunt manifestarea la scară macroscopică a interacțiunilor care au loc la nivel molecular sau atomic**.

2.5.2.1. Forțe de contact între suprafețe vecine

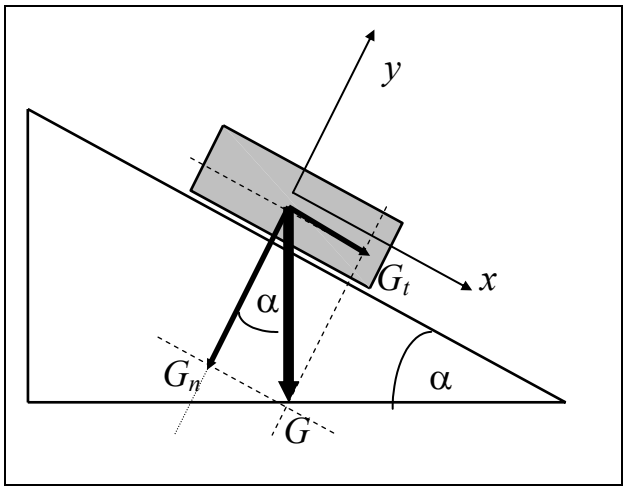


O experiență pe care o puteți face fără dificultate vă este sugerată de figura alăturată. Luați un volum cartonat şi puneți-l pe masă, având grijă să sprijiniți una dintre laturile sale pe câteva alte cărți. Pe suprafața înclinată, astfel formată, aşezați o cutie de chibrituri, o gumă sau alte corpuri asemănătoare. Veți constata că, în funcție de unghiul de înclinare şi de natura corpurilor de care vă folosiți, există două cazuri posibile: corpul pus pe carte rămâne în repaus sau alunecă în jos. Ceea ce ați realizat se numeşte : **studiul mişcării pe un plan înclinat**.

Figura următoare vă oferă un alt unghi de vedere, mai potrivit pentru a discuta experiența pe care o faceți. Înclinarea cărții este măsurată prin unghiul α, pe care aceasta îl face cu suprafața orizontală. Am ales un sistem de axe de coordonate în care :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 83

Planul înclinat este numit „**maşină simplă**”. Există trei asemenea maşini simple, folosite încă din vremea antichității : planul înclinat, scripetele şi pârghia. Despre planul înclinat se crede că a fost folosit la construirea piramidelor egiptene, cu scopul de a ridica la înălțimea cuvenită marile blocuri de piatră.



❖ axa *Ox* este paralelă cu muchia înclinată a cărții
❖ axa *Oy* este perpendiculară pe coperta cărții
❖ axa *Oz* este paralelă cu muchia sprijinită de masă (fiind astfel perpendiculară pe planul desenului)

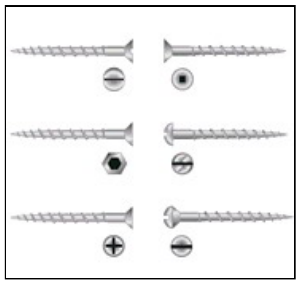
Utilizând acest sistem de axe de coordonate, puteți face *observația experimentală* că accelerația obiectului aflat pe carte este fie orientată în direcția şi în sensul axei *Ox*, fie nulă. Componentele accelerației pe axele *Oy* şi *Oz* sunt întotdeauna nule.

Ştim, conform principiilor dinamicii, că mişcarea accelerată a unui corp se explică prin acțiunea forțelor. Dacă singura forță care ar acționa asupra corpului ar fi greutatea, atunci, cum componenta sa G_n este nenulă, ar trebui să înregistrăm şi o accelerație orientată în sensul invers axei *Oy*. Rezultă de aici că acțiunea suprafeței de sprijin asupra corpului se materializează printr-o forță a cărei componentă pe axa *Oy* compensează întotdeauna componenta pe aceeaşi axă a greutății.

Componenta, perpendiculară pe suprafața de sprijin, a forței prin care aceasta acționează asupra corpului cu care este în contact se numeşte **forță de reacțiune normală** şi se notează cu litera ***N***.

Ce cauză are forța de reacțiune normală ? Să presupunem că avem un microscop care ne permite să vedem atomii şi că aceştia ar fi un fel de sfere impenetrabile. „Impenetrabilitatea” înseamnă, de fapt, că la apropierea a doi atomi, între aceştia încep să se exercită forțe de respingere, care nu le permit să „vină în contact” sau să se „întrepătrundă”. Încercând să presăm între ele două corpuri, atomii aflați la suprafețele lor de contact se apropie unii de alții, suficient de mult pentru ca forțele de respingere să se manifeste. Aceste forțe sunt orientate în direcții diferite şi apar în perechi, conform principiului acțiunii şi reacțiunii. Din motive de simetrie, rezultanta lor este perpendiculară pe suprafețele de contact dintre corpuri. **Deci, ceea ce, la ni-**

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 84



Ştiți ce este şurubul ? Ei bine, el este de fapt un plan înclinat, de forma unei spirale ! Mai mult, chiar şi un obiect casnic, precum tirbuşonul, este şi el un plan înclinat.

vel microscopic, este un ansamblu de forțe individuale, divers orientate, devine, la nivel macroscopic, o pereche de forțe egale în modul, având aceeaşi direcție şi sensuri contrare, dintre care una acționează asupra unui corp, iar cealaltă asupra celuilalt corp. Cu cât apăsarea pe care o exercită un corp asupra altuia creşte, cu atât forțele de interacțiune între atomi sau molecule cresc şi ele, iar rezultanta lor devine şi ea mai mare. Aceste forțe rezultante se numesc **forță de apăsare normală**, respectiv, **forță de reacțiune normală**. Care dintre aceste două forțe este acțiunea şi care reacțiunea este o pură convenție. Totuşi, în cazul experienței pe care o discutăm, este uzual să numim forța cu care cartea acționează asupra obiectului „forță de reacțiune normală", iar forța cu care obiectul acționează asupra cărții „forță de apăsare normală".

Să revenim la experiența în discuție ! Ne vom concentra acum asupra mişcării pe axa *Ox*. Aşa cum observăm, este posibilă atât mişcarea accelerată a corpului aflat pe carte, cât şi rămânerea lui în repaus. Repetând experiența la diferite unghiuri de înclinare şi utilizând corpuri diverse, putem remarca două aspecte :

❖ accelerația mişcării depinde de unghiul de înclinare. Pentru înclinări mari mişcarea se desfăşoară rapid, iar pentru înclinări mici corpul poate rămâne în repaus.
❖ la acelaşi unghi de înclinare, unele corpuri alunecă, iar altele rămân în repaus.

În general, corpurile având o suprafață lucioasă încep să alunece la unghiuri de înclinare mai mici decât cele având o suprafață aspră.

Priviți din nou figura. Singura componentă de forță pe axa *Ox* este G_t. Cum ea este nenulă, ar însemna ca *întotdeauna* să existe şi o componentă a accelerației pe această axă. Acest fapt este infirmat de experiență: *nu există întotdeauna* accelerație.

Trebuie să admitem, în consecință, că în lungul axei *Ox* trebuie să mai acționeze o forță având sens opus componentei G_t a greutății !

Această forță se datorează tot interacțiunii dintre corp şi suprafața de sprijin şi a primit denumirea de **forță de frecare**.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 85

În realitate, forța normală şi forța de frecare nu sunt forțe de natură deosebită. Există o singură interacțiune la suprafața comună corpurilor aflate în contact. Această forță de interacțiune are o direcție diferită de față direcția normalei. Este, totuşi, *comod* să discutăm separat despre componentele despre componentele acestei forțe de interacțiune după direcția normală (forța normală) şi direcția tangențială (forța de frecare).

Ce ştim despre forțele de frecare ? Cunoştințele noastre în acest domeniu provin din studiul experimental al fenomenului. Primele contribuții în acest sens le-a avut **Leonardo da Vinci** (1452-1519). Cercetările efectuate şi sinteza datelor obținute i-au permis lui **Charles Coulomb** (1736-1806) să formuleze **legile frecării**, cunoscute şi sub numele de **legile lui Coulomb**.

În primul rând, trebuie remarcat că există trei tipuri de frecare :

- frecare statică
- frecare la alunecare
- frecare la rostogolire

FRECAREA STATICĂ

Frecarea statică apare atunci când, sub influența forțelor externe, două corpuri în contact, aflate în repaus unul față de celălalt, au doar o tendință de mişcare relativă. F**orța de frecare statică nu are o valoare fixă** ! **Câtă vreme suprafețele aflate în contact rămân în repaus relativ, forța de frecare statică are o valoare care compensează componenta tangențială** (adică, componenta tangentă în zona de contact la ambele suprafețe) **a rezultantei celorlalte forțe, fiind orientată în aceeaşi direcție ca şi aceasta, dar având sens opus**. **Valoarea forței de frecare statică nu poate creşte oricât de mult**. Există o limită superioară a forței de frecare statică, numită **forța de frecare statică maximă**. *De cine şi de ce depinde sau nu depinde valoarea forței de frecare statică maximă* ? Experiențele conduc la următoarele concluzii :

Forța de frecare statică maximă este direct proporțională cu forța de apăsare normală care se exercită între suprafețele aflate în contact :

$F_{s,\,max} = \mu_s N$ (**prima lege a frecării statice**)

Factorul de proporționalitate μ_s se numeşte **coeficient de frecare statică**. **Valoarea coeficientului de frecare statică depinde de natura suprafețelor aflate în contact şi de gradul lor de prelucrare mecanică**. În general, cu cât suprafețele în contact sunt mai puțin finisate, cu atât coeficientul de frecare static are valori mai mari.

Forța de frecare statică maximă nu depinde de mărimea ariei suprafeței de contact a corpurilor (**a doua lege a frecării statice**)

COMENTARIUL DE LA PAGINA 86

Frecarea de rostogolire este cu câteva ordine mai mici decât frecarea de alunecare. De aceea, este mai convenabil să tragem o valiză cu rotile decât să o târâm în absența rotilelor. Deşi omul primitiv nu cunoştea fizica de azi, observația experimentală i-a permis să descopere roata, invenție considerată de excepțională valoare în istoria umanității.

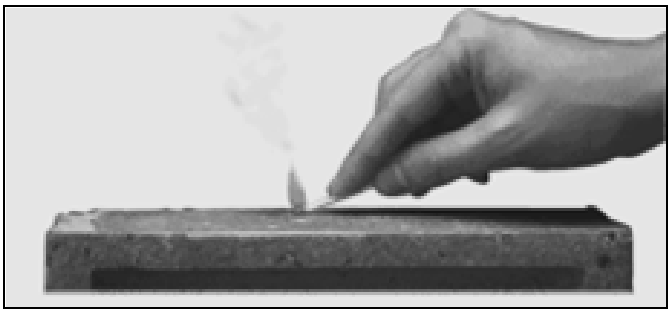
FRECAREA LA ALUNECARE

Forța de frecare la alunecare are valoare constantă. Direcția forței de frecare la alunecare este tangentă la ambele suprafețe aflate în contact, iar sensul său este opus sensului vitezei relative a unei suprafețe față de cealaltă.**Legile frecării la alunecare** sunt asemănătoare cu cele ale forței de frecare statică maximă :

✍ Forța de frecare la alunecare este direct proporțională cu forța de apăsare normală care se exercită între suprafețele aflate în contact:
$F_f = \mu N$ (**prima lege a frecării la alunecare**)

Factorul de proporționalitate μ se numeşte **coeficient de frecare la alunecare**. **Valoarea coeficientului de frecare la alunecare depinde de natura suprafețelor aflate în contact şi de gradul lor de prelucrare mecanică**. Coeficientul de frecare la alunecare are, în general, valori ceva mai mici decât coeficientul de frecare statică pentru aceleaşi perechi de materiale.

✍ Forța de frecare la alunecare nu depinde de mărimea ariei suprafeței de contact a corpurilor (**a doua lege a frecării la alunecare**)



Frecarea la alunecare este însoțită de încălzirea celor două suprafețe în contact şi de generarea unor sunete specifice. Astfel, aprinderea unui chibrit (vezi figura) este datorată încălzirii măciuliei de fosfor prin frecarea cu o suprafață aspră. Procesul este acompaniat de un sunet caracteristic.

FORȚA DE FRECARE LA ROSTOGOLIRE

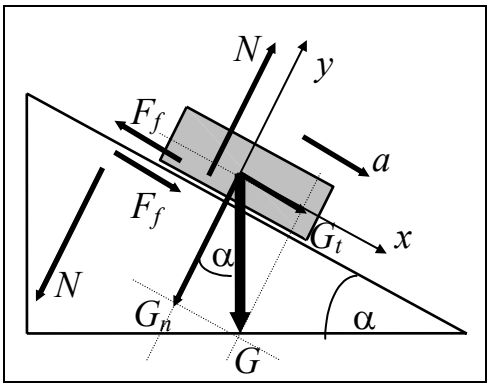
Forța de frecare la rostogolire este mult mai mică decât forța de frecare la alunecare. Particularitatea **forței de frecare la rostogolire** este că ea **depinde şi de inversul razei obiectului cilindric care se rostogoleşte** :

$F_r = \mu_r N/r$ (**legea frecării de rostogolire**)

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 87

Coeficientul de frecare la lunecare este adimensional. Întrebarea este : coeficientul de frecare la rostogolire este sau nu adimensional ?

Ce cauză au forțele de frecare ? Răspunsul este același ca și în cazul forțelor normale : **interacțiunile dintre atomii sau moleculele corpurilor aflate în contact**. La nivel microscopic, chiar și cele mai bine polizate suprafețe prezintă asperități sau neregularități. În mod obișnuit, acestea se întrepătrund, porțiunile proeminente ale unui material intrând în adânciturile celuilalt. La încercarea de a deplasa un corp față de celălalt, la suprafețele microscopice de contact apar forțe normale pe acestea, dar oblice față de direcția deplasării. La nivel macroscopic, rezultanta acestor forțe are o componentă tangențială, care este chiar forța de frecare. Acest model ne permite să explicăm de ce forța de frecare depinde de forța de apăsare normală : cu cât aceasta este mai mare asperitățile materialelor se întrepătrund mai bine și suprafețele lor oblice de contact se măresc. Se mai remarcă din această explicație că, de fapt, **forța de frecare depinde de suprafața reală, microscopică,** de contact între corpuri și nu de suprafața geometrică, macroscopică. Aceasta ar fi motivarea teoretică a celei de-a doua legi a frecării. Atâta vreme cât există numai o tendință de deplasare relativă a corpurilor aflate în contact, forțele care se exercită între asperitățile materialelor au ca rezultat doar deformarea elastică a acestora. Mărirea solicitării tangențiale poate duce la deformarea plastică a asperităților sau chiar la ruperea lor, urmarea fiind începerea deplasării relative și micșorarea suprafeței reale de contact între corpuri. Acesta din urmă este și motivul pentru care coeficientul de frecare la alunecare are valoare ceva mai mică decât coeficientul de frecare statică. Pentru a verifica experimental aceste afirmații luați o bucată de cretă și rupeți-o în două. Examinați vizual și pipăiți suprafețele rezultate. Veți constata că ele sunt neregulate și aspre. Trageți acum o linie pe tablă, astfel încât suprafața respectivă să vină în contact cu tabla. Repetați examinarea. Veți constata că suprafața în cauză este mult mai netedă !



Revenind la experiența descrisă la început și la reprezentarea forțelor, observați că pentru a explica comportamentul corpului așezat pe planul înclinat trebuie adăugate două noi forțe, care se alătură greutății : forța de reacțiune normală și forța de frecare. De asemenea, apar și cele două forțe cu care corpul acționează asupra cărții : forța de apăsare normală și forța de frecare.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 88

V-ați gândit că la tablă se scrie cu alb pe negru, iar în caiet cu negru pe alb ?

Unul din motive este acela că obișnuita cretă este un material ușor de obținut din carbonat de calciu, caolin (argilă), acid oleic și sodă caustică. Dimpotrivă, primele mine de creion erau confecționate din plumb și lăsau urme gri închis pe hârtia albă.

2.5.2.2. Forţa elastică

Figura de mai sus vă evidenţiază suspensia roţii unei mici maşini de curse. Arcul suspensiei se deformează sub acţiunea forţelor externe şi revine la forma iniţială după încetarea solicitării externe.

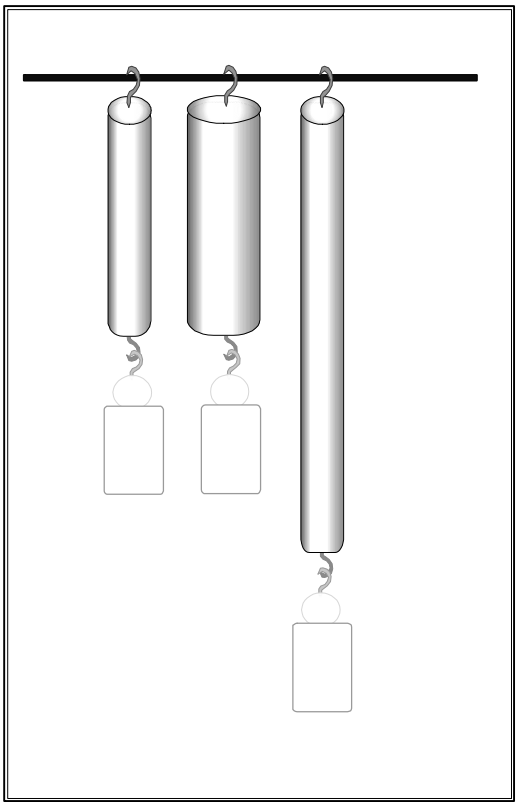
✍ Un corp care se deformează sub acţiunea forţelor externe şi revine la forma iniţială după încetarea solicitării externe se numeşte **corp elastic**. Dacă corpul nu mai revine la forma iniţială după încetarea acţiunii externe, el se numeşte **corp plastic**.

Resortul elastic, aşa cum este şi cel prezentat în fotografie este unul dintre cele mai obişnuite exemple de corpuri elastice. **Proprietatea principală a unui resort elastic este aceea că deformarea sa este direct proporţională cu intensitatea forţei deformatoare**.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 89

În realitate, nu există corpuri perfect plastice sau perfect elastice. Un exemplu este o minge de fotbal. Dacă aceasta este umplută cu aer la presiunea corespunzătoare, ea se comportă ca un corp aproape perfect elastic. În caz contrar, predomină caracterul de corp plastic.

Condiția ca un corp să fie elastic este aceea ca el să fie confecționat dintr-un material elastic. Materialele obişnuite sunt mai mult sau mai puțin elastice. Exemple de materiale elastice ar putea fi oțelul, cauciucul sau fildeşul. La cealaltă extremă, materiale plastice sunt plumbul, plastilina sau smoala. Calitățile elastice ale diferitelor materiale pot fi determinate experimental.



O modalitate de măsurare experimentală a elasticității unui material vă este sugerată de figura alăturată. Se confecționează din materialul respectiv bare de diverse lungimi şi grosimi. Barele sunt fixate la capătul superior, iar la capătul inferior se atârnă corpuri de greutate cunoscută. În acest mod, se poate studia alungirea barelor în funcție de trei parametri : lungimea, aria secțiunii transversale şi mărimea forței deformatoare. Practic, doi dintre parametri sunt menținuți constanți, iar alungirea se determină în urma variației celui de-al treilea parametru. Concluziile experimentale sunt următoarele :

- alungirea este direct proporțională cu intensitatea forței deformatoare
- alungirea este direct proporțională cu lungimea barei
- alungirea este invers proporțională cu aria secțiunii transversale a barei

Formula matematică care înglobează aceste legi experimentale se numeşte **legea lui Hooke** şi are următoarea formă :

$$\boxed{\Delta l = \frac{F l_0}{E S}}$$

unde Δl este alungirea, F este modulul forței deformatoare, l_0 este lungimea inițială a barei, S este aria secțiunii transversale, iar E **este o constantă care caracterizează proprietățile elastice ale materialului din care este confecționată bara**, numită **modulul de elasticitate** sau **modulul lui Young**.

BIOGRAFIA DE LA PAGINA 90

Robert Hooke (1635-1703) a anticipat o serie de descoperiri sau invenții ale epocii. A considerat problema mişcării planetelor ca o problemă de mecanică, dar nu a reuşit să ajungă la descoperirea legii atracției universale. Cele mai cunoscute contribuții în domeniul fizicii constau în **formularea teoriei elasticității** şi **analiza fenomenului arderii**. A fost printre primii care au utilizat microscopul şi a descoperit că plantele sunt formate din celule.

Legea lui Hooke este valabilă şi în cazul comprimării barei, Δl măsurând de această dată scurtarea acesteia.

Legea lui Hooke se mai poate scrie şi astfel :

$$\boxed{\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}}$$

În această expresie, termenul $\varepsilon = \Delta l / l_0$ se numeşte **alungire relativă**, iar raportul $\sigma = F/S$ se numeşte **efort unitar**. În această formulare, legea lui Hooke se enunţă astfel : **alungirea relativă a unei bare supusă întinderii este direct proporţională cu eforttul unitar**.

✍ Deformarea Δl este proporţională cu forţa deformatoare F doar dacă aceasta din urmă nu depăşeşte anumite valori. Dacă aceste valori sunt depăşite, materialul nu-şi mai păstrează proprietăţile elastice şi se poate chiar rupe.

Iată în continuare un tabel care vă prezintă valorile modului de elasticitate şi ale efortului unitar de rupere la alungire pentru câteva materiale:

Materialul	Modulul de elasticitate (N/m^2)	Efortului unitar de rupere (N/m^2)
Oţel	$19{,}6 \cdot 10^{10}$	$6{,}86 \cdot 10^{8}$
Fier	$19{,}6 \cdot 10^{10}$	$5{,}88 \cdot 10^{8}$
Cupru	$11{,}7 \cdot 10^{10}$	$2{,}35 \cdot 10^{8}$
Plumb	$1{,}66 \cdot 10^{10}$	$0{,}20 \cdot 10^{8}$
Sticlă	$4{,}90 \cdot 10^{10}$	$0{,}29 \cdot 10^{8}$
Lemn	$0{,}98 \cdot 10^{10}$	-

Analizând datele din acest tabel, puteţi extrage unele concluzii :

❖ **legea lui Hooke este valabilă doar în cazul unor forţe de întindere relativ mici.** Astfel, o bară de oţel se rupe atunci când este întinsă cu o forţă de circa 300 de ori mai mică decât aceea care i-ar dubla lungimea. Rezultă de aici că **putem aplica legea lui Hooke doar în cazul unor eforturi unitare de câteva sute sau mii de ori mai mici decât modulul de elasticitate**.

BIOGRAFIA DE LA PAGINA 91

Thomas Young (1773 – 1829), medic şi fizician englez. A avut merite deosebite în promovarea teoriei naturii ondulatorii a luminii. A arătat că orice culoare percepută de ochiul uman este reproductibilă prin combinarea a trei culori de bază: roşu, verde şi albastru. A făcut măsurători ale dimensiunilor moleculelor, tensiunii superficiale a lichidelor şi elasticităţii corpurilor. S-a ocupat de egiptologie.

❖ deformările solidelor au valori mici, de multe ori insesizabile cu ochiul liber. Astfel o coardă de pian, din oțel, cu lungimea de 1 m şi aria secțiunii transversale de 0,5 mm^2 (sau diametru de 0,8 mm), s-ar întinde doar cu 1 mm sub acțiunea unei forțe:

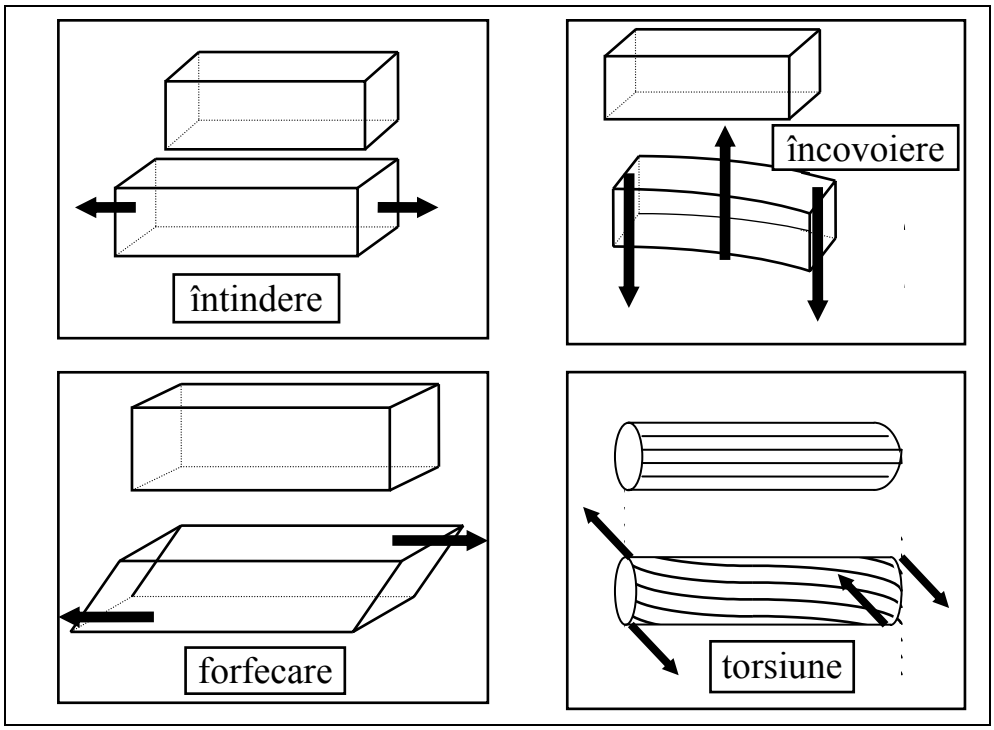
$$F = \frac{ES\Delta l}{l_0} = \frac{19{,}6\cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2\cdot 1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}} = 98\,\mathrm{N}$$

egală cu greutatea unui corp de 10kg !

❖ constanta de elasticitate a unui fir sau a unei bare depinde atât de dimensiunile geometrice, cât şi de natura materialului din care este confecționat firul sau bara. În exemplul precedent, ținând cont că deformarea x şi alungirea Δl reprezintă acelaşi lucru, constanta de elasticitate k se poate calcula astfel:

$$F = \frac{ES}{l_0}\cdot \Delta l = kx \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{ES}{l_0}$$

$$k = \frac{19{,}6\cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{1\,\mathrm{m}} = 98.000\,\mathrm{N/m}$$



Materialele solide pot suporta şi alte tipuri de solicitări deformatoare în afara întinderii sau comprimării :

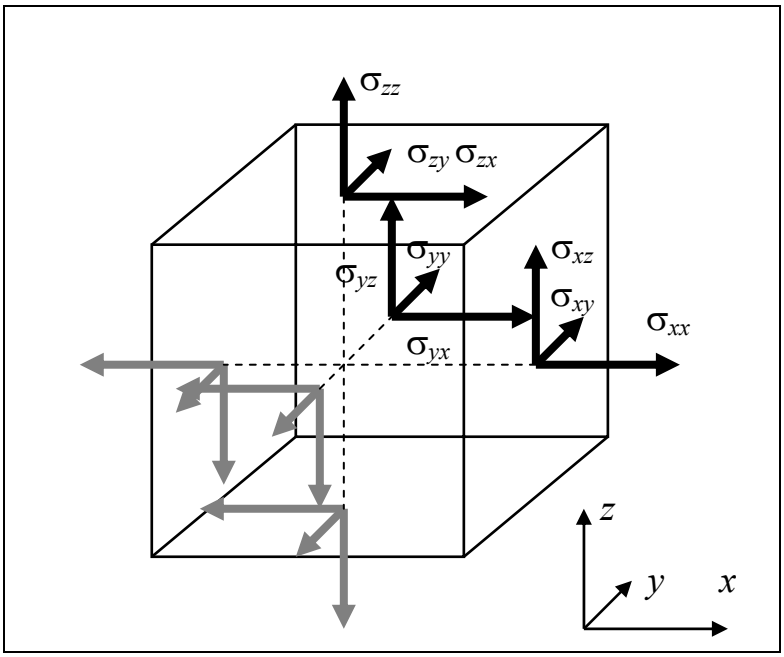
❖ **Încovoierea**
❖ **Forfecarea**
❖ **Torsiunea**

În toate aceste cazuri şi în limita elasticității materialului, deformările sunt proporționale cu solicita-

COMENTARIUL DE LA PAGINA 92

Deformarea solidelor poate fi provocată nu numai prin acțiunea unor forțe mecanice. Variațiile de temperatură pot determina alungiri sau contracții ale materialelor. Dacă capetele solidului sunt fixate, dilatarea sau contracția termică pot determina apariția unor tensiuni extrem de mari în material. Ca exemplu, vara, şinele de tramvai se pot curba, iar iarna, rupe.

rea externă, depind de materialul din care este confecționat corpul, precum şi de forma şi dimensiunile geometrice ale acestuia. Într-un caz concret, cele patru tipuri de deformare se pot produce concomitent, variind, eventual, ponderea lor. Prin idealizare, când un tip de deformare este preponderent, celelalte pot fi neglijate, fără a se produce consecințe importante.



Forțele care produc deformarea unui element de volum acționează asupra fețelor elementului de volum. Fiecare dintre aceste forțe are câte o componentă normală şi două componente tangențiale, paralele cu axele de coordonate. Există 6×3=18 componente de forțe deformatoare. Dacă elementul de volum este în echilibru de translație, componentele forțelor care acționează pe fețele opuse sunt egale în modul şi au sensuri contrare. Rămân astfel doar 9 componente independente. Eforturile unitare corespunzătoare sunt componentele unui tensor :

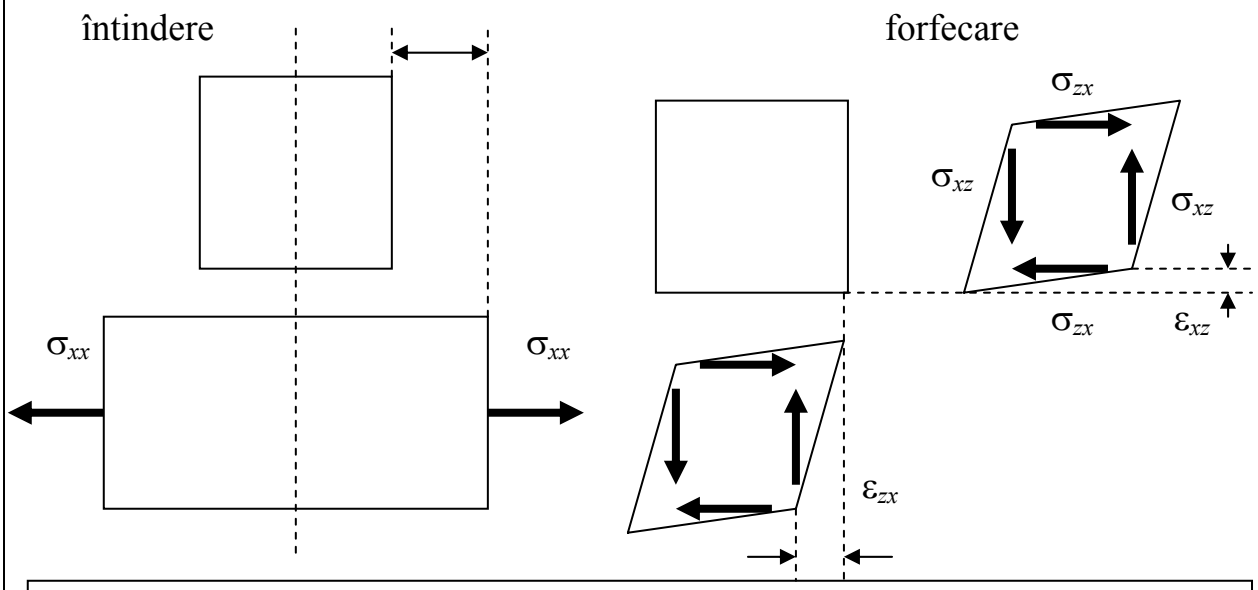
$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Componentele tangențiale ale forțelor de pe fețele opuse creează cupluri de forțe care tind să rotească elementul de volum. Astfel eforturile σ_{xy} şi $-\sigma_{xy}$ tind să rotească elementul de volum în jurul axei *Oz*. La fel, eforturile σ_{yx} şi $-\sigma_{yx}$ ar produce tot o rotație în jurul axei *Oz*, dar în sens invers. Dacă elementul de volum, **oricum ar fi el ales**, este în echilibru şi din punct de vedere al rotației, rezultă că eforturile σ_{xy} şi σ_{yx} sunt egale. La fel stau lucrurile şi dacă analizăm tendințele de rotație în jurul celorlalte două axe de coordonate. În consecință numărul eforturilor independente se reduce cu trei, astfel încât tensorul tensiunilor nu are decât 6 componente independente. Concluzia este aceea că **tensorul tensiunilor este simetric** :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 93

În urma unei schimbări de coordonate, un tensor simetric se transformă tot într-un tensor simetric. De asemenea, suma elementelor diagonale înainte de transformarea de coordonate (**trasa** tensorului) este aceeaşi cu suma acestor elemente după transformare. Printr-o alegere potrivită a axelor coordonate un tensor simetric poate fi adus la forma diagonală.

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$



Dacă un element de volum este supus doar efortului longitudinal σ_{xx} (restul componentelor tensorului tensiunilor fiind nule) elementul de volum se va lungi pe direcția x, dar se va subția pe celelalte două direcții (această subțiere este explicabilă prin aceea că volumul nu se modifică). Alungirile relative corespunzătoare sunt :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\mu \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

Coeficientul μ se numeşte coeficientul lui Poisson şi este introdus pentru ține cont de subțierea despre care vorbeam anterior. Dacă elementul de volum este supus doar forfecării, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, restul componentelor tensorului tensiunilor fiind nule, vor exista alungirile relative :

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{\sigma_{xz}}{2G} = \frac{\sigma_{zx}}{2G}$$

Constanta G se numeşte modul de forfecare şi se poate exprima în funcție de modulul de elasticitate : $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 94

La schimbarea sistemului de coordonate componentele unui tensor de ordinul doi se transformă după regula :

$$T'_{ij} = \sum_{l=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} R_{il} R_{jk} T_{lk}$$

unde R_{mn} sunt coeficienți care depind de modul în care se face schimbarea coordonatelor.

Sub forma cea mai generală, se poate scrie următoarea relație de legătură între tensorul deformărilor şi tensorul tensiunilor :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1+\mu}{E}\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} - \frac{\mu}{E}\begin{pmatrix} \sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

2.5.2.3. Forțe de tensiune

Să privim cu atenție fotografia şi detaliul din caseta de mai sus. Există acolo obiecte menținute în anumite poziții prin forțe de contact. *Ce caracteristici au aceste forțe de legătură* ? Ele sunt, cel mai probabil, forțe elastice. Din păcate, deformările cărora le sunt datorate sunt greu de sesizat sau de măsurat, iar constantele de elasticitate corespunzătoare nu sunt cunoscute. Din aceste motive, **aceste forțe de legătură au valori care nu pot fi calculate utilizând formule specifice**. **Valorile lor sunt determinate de celelalte forțe care acționează asupra corpului considerat şi de starea de mişcare a acestuia**. Forțele de acest tip se numesc **forțe de tensiune** şi se notează în mod uzual cu litera *T*. În aplicațiile curente, forțele de tensiune se întâlnesc în punctele de contact între corpuri şi firele sau tijele de care acestea sunt fixate. **În cazul firelor flexibile, forțele de tensiune sunt orientate întotdeauna pe direcția firului şi se opun întinderii acestuia. În cazul tijelor rigide, forțele de tensiune pot avea orice orientare**.

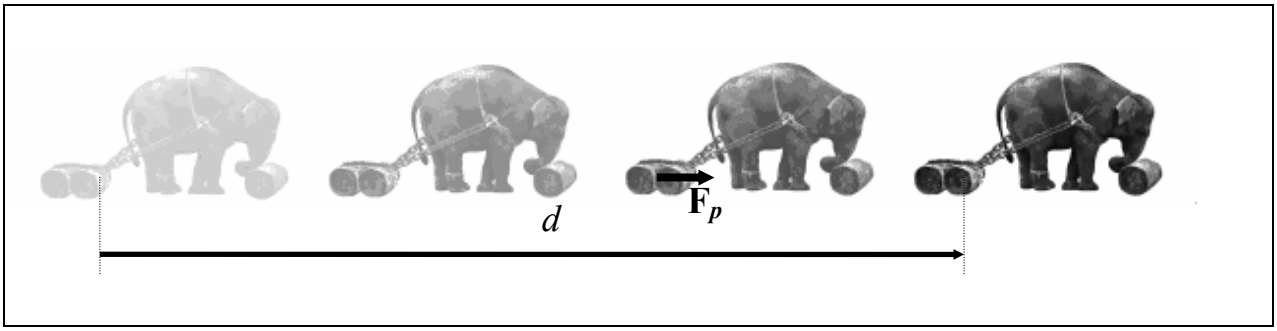
PROBLEMA DE LA PAGINA 95

Inversați relația între tensorul deformărilor şi tensorul tensiunilor, adică exprimați tensorul tensiunilor în funcție de tensorul deformărilor.

2.6. TEOREMELE DINAMICII

2.6.1. LUCRU MECANIC ŞI PUTERE

Termenul de *lucru* poate însemna în limba română şi *muncă*, dar şi *obiect*. Mărimea fizică *lucru* are legătură cu *munca* sau *travaliul* (*work* în engleză, *travail* în franceză). Şi pentru că *travaliu* pare un cuvânt nu prea românesc, *muncă* este un termen prea vast, iar simplul *lucru* este imprecis, fizicienii români s-au hotărât să denumească mărimea fizică despre care vorbim **lucru mecanic**. Elefantul din figură, trăgând legătura de lemne, face lucru mecanic.



Remarcați, poate, privind desenul, că a fost nevoie să se sugereze trecerea timpului, pe măsură ce elefantul îşi transportă încărcătura de lemne. Aceasta ne arată că lucrul mecanic este *ceva* care se face în timp. Exprimarea corectă, în fizică, este că : **lucrul mecanic** este o **mărime de proces**. Multe dintre mărimile fizice pe care le-am studiat până acum (accelerație, viteză, forță) sunt **mărimi de stare**, adică mărimi caracterizate la fiecare moment de timp de o valoare instantanee. Spre deosebire de ele, **lucrului mecanic nu i se poate atribui o valoare momentană**, el nu poate fi „înghețat” într-o singură fotografie ! Când faci lucru mecanic există un început şi un sfârşit.

Activitatea sau munca elefantului din figură mai poate fi caracterizată prin două elemente: forța pe care o aplică legăturii de lemne şi distanța pe care le transportă. Acestea sunt două mărimi fizice măsurabile, care, împreună, ne vor ajuta să măsurăm lucrul mecanic.

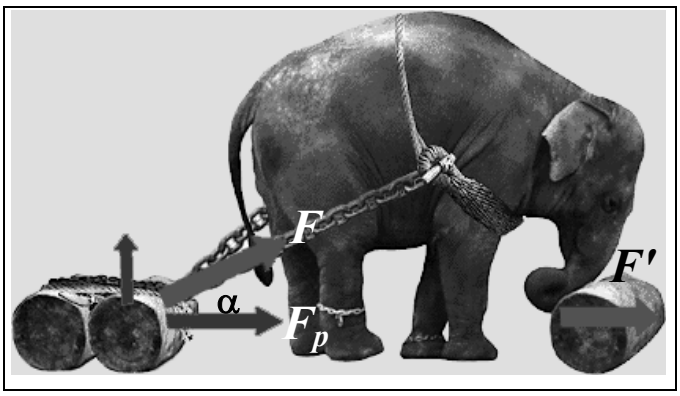
CUGETAREA DE LA PAGINA 96

Apropo de muncă :

Dacă vrei ca visurile să ți se împlinească, nu dormi.

Proverb evreiesc

Prin definiție, **lucrul mecanic** este mărimea fizică scalară numeric egală cu produsul dintre lungimea deplasării unui corp şi componenta constantă şi paralelă cu direcția deplasării a forței care acționează asupra corpului :
$L = F_p d$



Să mai privim încă o dată cu atenție la elefantul care cară lemne (figura alăturată). Putem remarca o deosebire între forța F cu care trage lemnele şi forța F' cu care le împinge: prima este orientată oblic, sub unghiul α față de direcția deplasării, iar a doua paralel cu deplasarea. Dacă lucrul mecanic al forței F' este $L' = F'd$, lucrul mecanic al forței F este :

$$L = F_p d = F d \cos \alpha$$

Forța şi deplasarea sunt vectori. Ultima formulă pe care am scris-o corespunde unei operații matematice cu vectori : **produsul scalar**. Prin urmare, putem rescrie formula lucrului mecanic în modul următor :

$$\boxed{L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}}$$

Enunțul corespunzător este : **lucrul mecanic** este mărimea fizică scalară numeric egală cu produsul scalar dintre vectorul constant forță şi vectorul deplasare al punctului de aplicație al forței.

DEFINIȚIA PE CARE AM DAT-O LUCRULUI MECANIC ŞI FORMULA DE CALCUL A ACESTUIA **AU O MARE PROBLEMĂ**. PENTRU A FI APLICATE **ESTE NECESAR CA PROIECȚIA FORȚEI PE DIRECȚIA DEPLASĂRII SĂ FIE CONSTANTĂ PE TOATĂ DURATA DEPLASĂRII CONSIDERATE**.

CUM SE POATE CALCULA LUCRUL MECANIC DACĂ ACESTE CONDIȚII NU SUNT ÎNDEPLINITE, IATĂ O ÎNTREBARE AL CĂRUI RĂSPUNS ÎL VEȚI GĂSI PE PAGINA URMĂTOARE.

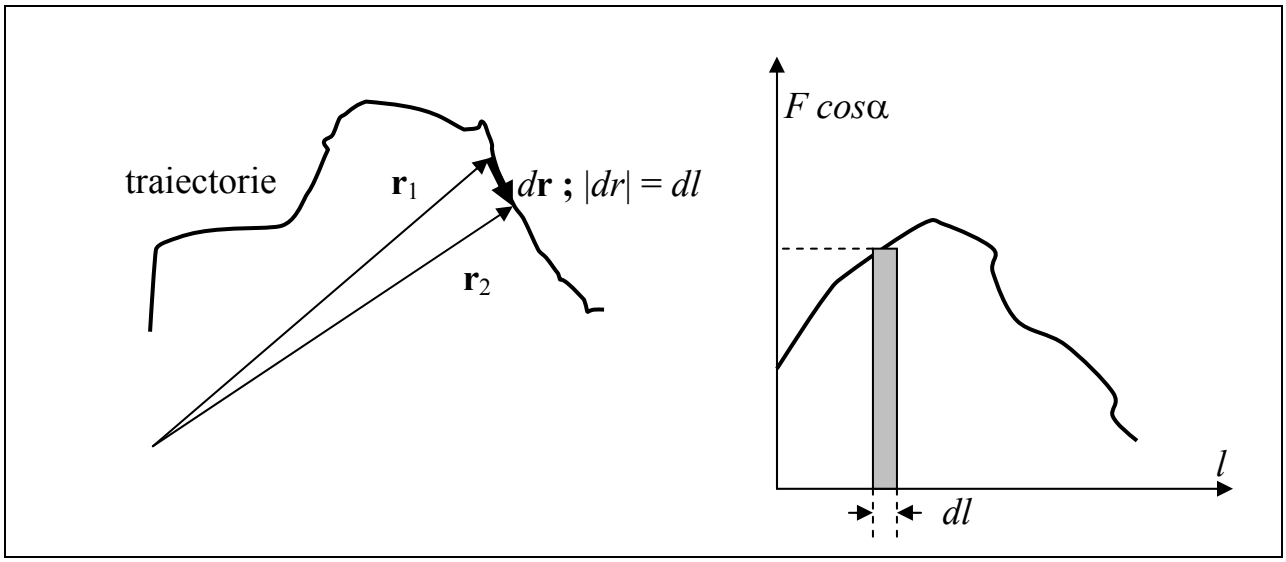
INFORMAȚIA DE LA PAGINA 97

Unitatea de măsură a lucrului mecanic în Sistemul Internațional se numeşte **joule** şi are simbolul **J**. Conform definiției lucrului mecanic, putem scrie :

$$[L]_{SI} = [F]_{SI}[d]_{SI} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{J}$$

adică un joule este lucrul mecanic făcut la deplasarea punctului de aplicație al unei forțe de un newton pe distanța de un metru în direcția şi sensul forței.

CALCULUL LUCRULUI MECANIC AL UNEI FORȚE VARIABILE



Să considerăm situația schematizată în figura de mai sus. Un corp este deplasat cu ajutorul unei forțe variabile, care face un unghi variabil cu direcția instantanee a deplasării, în lungul unei traiectorii de lungime l. Două poziții succesive, foarte apropiate, ale corpului pe traiectorie sunt caracterizate de vectorii de poziție $\mathbf{r}_1$ şi $\mathbf{r}_2$. Modulul diferenței acestor vectori $|d\mathbf{r}|$ aproximează foarte bine lungimea porțiunii de traiectorie parcurse de corp în intervalul de timp considerat : dl. În graficul din dreapta este reprezentat modul de variație a componentei forței care este paralelă cu direcția instantanee a mişcării $F\ cos\alpha$ în funcție de lungimea drumului parcurs pe traiectorie.

Considerând că pe o porțiune foarte mică a traiectoriei, componenta tangențială a forței este **practic constantă**, lucrul mecanic corespunzător poate fi calculat cu formula de definiție :

$dL = F\ dl\ cos\alpha = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$

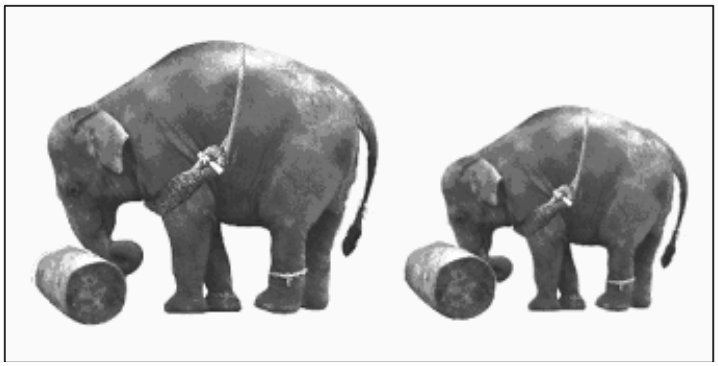
Grafic, acest lucru mecanic elementar este reprezentat de aria unui dreptunghi având ca bază segmentul dl şi ca înălțime valoarea componentei tangențiale a forței : $F\ cos\alpha$

Lucrul mecanic total se poate calcula adunând valorile lucrului mecanic făcut pe fiecare asemenea porțiune, ceea ce matematic revine la a calcula integrala :

$$L_{\mathbf{AB}} = \int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

PRECIZAREA DE LA PAGINA 98

Integrala care permite calcularea lucrului mecanic nu este o integrală simplă ci o **integrală curbilinie**. Valoarea ei depinde de drumul urmat între punctele **A** şi **B** şi nu numai de poziția acestora. Din această cauză facem şi afirmația „lucrul mecanic este o mărime de proces”.



Să privim figura alăturată. Ne putem întreba : „*Care dintre cei doi elefanți va reuşi să ajungă primul la capătul drumului?*”. Fără îndoială, răspunsul va fi că primul îşi termină treaba elefantul mai mare. *De ce* ? Pentru că este mai puternic ! *Dar, ce înseamnă „mai puternic”* ? *Cum realizăm că este mai puternic* ? Proba practică a puterii se face prin lucrul mecanic realizat şi prin timpul necesar.

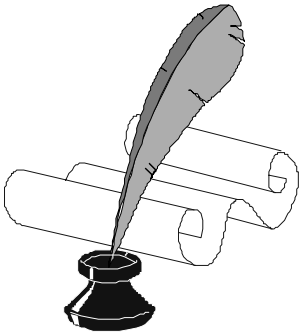
Cu cât se face un lucru mecanic mai mare într-un interval de timp mai scurt, cu atât puterea (ca mărime fizică) este mai mare.

Prin definiție **puterea mecanică** medie este mărimea fizică scalară numeric egală cu lucrul mecanic făcut în unitatea de timp :

$$\boxed{P_m = \frac{L}{\Delta t}}$$

Ca şi viteza medie, puterea mecanică medie nu descrie satisfăcător fiecare moment de timp al unui proces fizic. De aceea, este necesară definirea puterii instantanee sau momentane :

$$\boxed{P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt}}$$



Puterea momentană se poate exprima în funcție de viteza momentană şi forță, după cum urmează :

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Puterea momentană este numeric egală cu produsul scalar dintre vectorii forță şi viteză.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 99

În SI unitatea de măsură a puterii se numeşte **watt** şi are simbolul W. Conform definiției puterii, putem scrie :

$$[P]_{SI} = \frac{[L]_{SI}}{[\Delta t]_{SI}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}$$

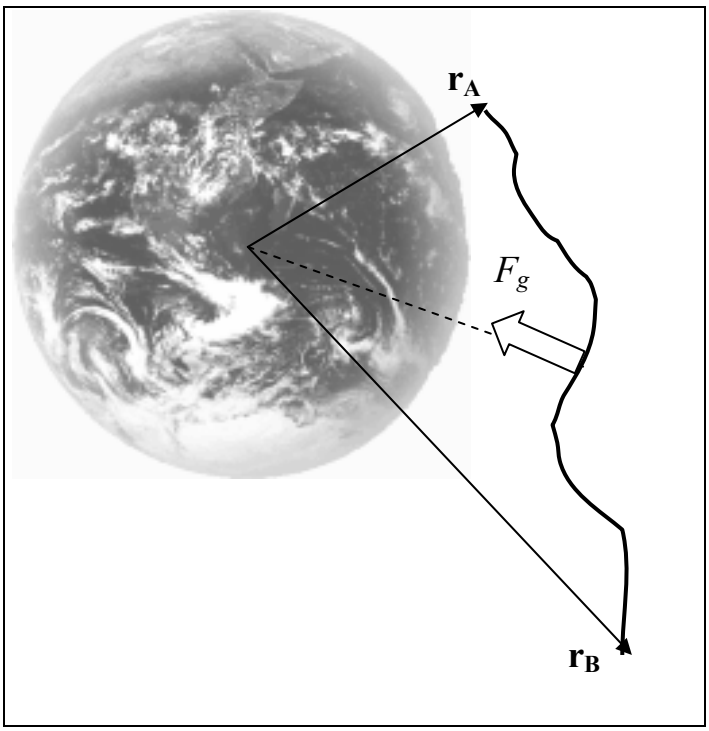
şi enunța : un watt este puterea dezvoltată de o forță care face un lucru mecanic de un joule în timp de o secundă.

2.6.2. FORȚE CONSERVATIVE, ENERGIE POTENȚIALĂ

Spre deosebire de alte lecții, de data aceasta, vom începe cu o definiție seacă :

Forțele conservative sunt acele forțe care se bucură de proprietatea că lucrul mecanic pe care îl fac nu depinde nici de forma traiectoriei, nici de modul de deplasare pe traiectorie. Lucrul lor mecanic depinde doar de pozițiile inițială şi finală ale punctului material asupra căruia acționează.

Dacă analizați cu atenție definiția, nu se poate să nu puneți întrebarea : *poziții față de ce sau de cine* ? Ca să răspundem la întrebare să ne amintim că orice forță reală este manifestarea interacțiunii între două corpuri materiale. Deci pozițiile inițială şi finală ale punctului material ar trebui raportate la corpul sau la sistemul de corpuri cu care interacționează.



Să discutăm binecunoscutul exemplu al interacțiunii gravitaționale. Să presupunem că un mic corp se deplasează între două puncte **A** şi **B** aflate în vecinătatea Pământului.

Punctul material şi Pământul formează un sistem de corpuri. Acest sistem de corpuri prezintă la fiecare moment de timp o anumită **configurație**, înțelegând prin aceasta poziția relativă pe care o ocupă corpurile sistemului unele față de celelalte. În cursul unui proces care implică efectuarea de lucru mecanic, configurația variază.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 100

În cazul interacțiunilor de la distanță, forța rezultantă cu care un sistem de corpuri care acționează asupra unui corp de probă depinde în mod continuu de poziția pe care o ocupă acesta din urmă. Este *comod matematic* să considerăm că orice punct din spațiu aparține unui **câmp de forțe** generat de sistemul de corpuri, iar forța care acționează asupra corpului de probă este rezultatul interacțiunii acestuia cu câmpul şi depinde numai de caracteristicile corpului de probă şi câmpului în punctul considerat.

Într-un punct oarecare al traiectoriei punctului material, forța gravitațională are expresia:

$$\mathbf{F}_g(\mathbf{r}) = -\frac{kmM_P}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Raza vectoare **r** caracterizează poziția corpului față de centrul Pământului, iar *m* este masa corpului, respectiv M_P este masa Pământului. Lucrul mecanic efectuat de forța gravitațională la deplasarea punctului material din **A** în **B** este :

$$L_{\mathbf{AB}} = \int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})} \mathbf{F}_g(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})} -\frac{kmM_P}{r^3}\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

Ştim că pătratul modulului unui vector este egal cu produsul scalar între acel vector şi el însuşi : $r^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$. Dacă diferențiem această expresie, obținem :

$$d\left(r^2\right) = d\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}\right) = d\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = 2\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}d\left(r^2\right) = \frac{1}{2}d\xi$$

Pe de altă parte, putem scrie şi :

$$r^3 = \left(r^2\right)^{\frac{3}{2}} = \xi^{\frac{3}{2}}$$

Prin urmare, expresia lucrului mecanic se poate scrie ca :

$$L_{\mathbf{AB}} = \int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})} -\frac{1}{2}\frac{kmM_P}{\xi^{\frac{3}{2}}}d\xi = -\frac{1}{2}\frac{kmM_P}{-\frac{1}{2}\xi^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_{\xi_{\mathbf{A}}}^{\xi_{\mathbf{B}}} = \left(\frac{kmM_P}{\sqrt{\xi_{\mathbf{B}}}} - \frac{kmM_P}{\sqrt{\xi_{\mathbf{A}}}}\right)$$

Revenind la variabila *r*, obținem :

$$\boxed{L_{\mathbf{AB}} = \frac{kmM_P}{r_{\mathbf{B}}} - \frac{kmM_P}{r_{\mathbf{A}}}}$$

Analizând rezultatul, ajungem la concluzia că forța gravitațională este o forță conservativă, pentru că expresia lucrului mecanic nu depinde în nici-un fel de forma traiectoriei sau de viteza cu care punctul material s-a mişcat pe traiectorie. În cazul sistemului considerat, singurii parametri de care depinde lucrul mecanic al forței gravitaționale sunt distanțele inițială şi finală între punctul material şi centrul Pământului.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 101

Faptul că lucrul mecanic nu depinde decât de distanțele inițială şi finală şi nu de vectorii de poziție corespunzători este o consecință a simetriei sferice a câmpului gravitațional terestru. Astfel de câmpuri cu simetrie sferică se mai numesc şi **câmpuri centrale**.

✍ În general, orice configurație a sistemului Pământ-corp de probă este caracterizată prin factorul :

$$-\frac{kmM_P}{r}$$

Convenim să denumim acest factor : **energia potențială a sistemului Pământ-corp de probă** în configurația dată şi să-l notăm W_p.

Cu această definiție, expresia lucrului mecanic al forței gravitaționale devine :

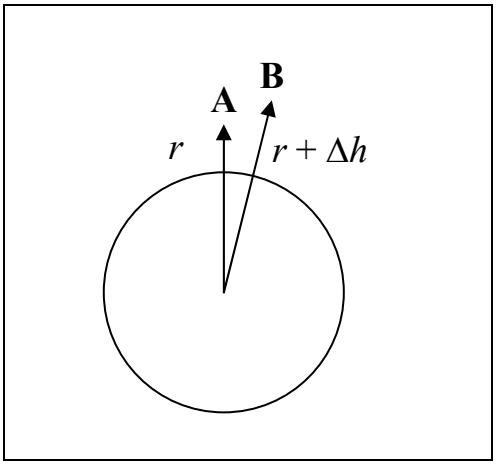
$$L_{\mathbf{AB}} = -W_p(\mathbf{r_B}) + W_p(\mathbf{r_A}) = -\Delta W_{p,\mathbf{AB}}$$

Această relație poate fi generalizată pentru orice câmp de forțe conservative. Prin urmare, putem defini noțiunea de energie potențială astfel :

✍ Într-un câmp de forțe conservative, variația energiei potențiale în cursul unui proces este numeric egală cu lucrul mecanic efectuat în cursul procesului de forțele conservative implicate, luat cu semn schimbat :

$$\boxed{\Delta W_{p,\mathbf{AB}} = W_{p,\mathbf{B}} - W_{p,\mathbf{B}} = -L_{\mathbf{AB},conservativ}}$$

UN CAZ PARTICULAR



În particular, în cazul $r_{\mathbf{B}} \cong R_P + \Delta h\,;\, \Delta h << R_P$, $r_{\mathbf{A}} \cong R_P$, expresia lucrului mecanic al forței gravitaționale devine :

$$L_{\mathbf{AB}} = \frac{kmM_P}{R_P + \Delta h} - \frac{kmM_P}{R_P} =$$

$$= -\frac{kmM_P}{R_P(R_P + \Delta h)}h \cong -m\frac{kM_P}{R_P^2}\Delta h = -mg\Delta h$$

Expresia corespunde lucrului mecanic efectuat de forța gravitațională în imediata apropiere a suprafeței Pământului.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 102

Energia potențială a unui sistem de corpuri care interacționează prin forțe conservative poate fi definită până la un factor aditiv, arbitrar. În adevăr, definind $W'_p = W_p + const$, rezultă : $L_{\mathbf{AB}} = -W'_{p,\mathbf{B}} + W'_{p,\mathbf{A}} = -W_{p,\mathbf{B}} + W_{p,\mathbf{A}}$. Operația prin care constantei i se atribuie o valoare convenabilă se numeşte **etalonare**.

RELAȚIA ÎNTRE FORȚĂ ŞI ENERGIA POTENȚIALĂ

În general, lucrul mecanic are expresia :

$$L_{\mathbf{AB}} = \int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

În cazul unui câmp de forțe conservative, expresia lucrului mecanic este :

$$L_{\mathbf{AB}} = -\left(W_{p,\mathbf{B}} - W_{p,\mathbf{A}}\right) = -\int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})} dW_p$$

Deci în cazul câmpurilor de forțe conservative există relația :

$$\boxed{\int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})} dW_p = -\int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B}}$$

Energia potențială este o funcție doar de poziția pe care o ocupă corpul de probă :

$$W_p = W_p(\mathbf{r}) = W_p(x, y, z) \quad \Rightarrow \quad dW_p(x, y, z) = \frac{\partial W_p}{\partial x} dx + \frac{\partial W_p}{\partial y} dy + \frac{\partial W_p}{\partial z} dz$$

Pe de altă parte, produsul scalar dintre forță şi vectorul deplasare se poate explicita în modul următor :

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z\right) \cdot \left(\mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz\right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Înlocuind în relația integrală, obținem :

$$\int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})} \left[\left(\frac{\partial W_p}{\partial x} + F_x \right) dx + \left(\frac{\partial W_p}{\partial y} + F_y \right) dy + \left(\frac{\partial W_p}{\partial z} + F_z \right) dz \right] = 0 \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B}$$

Pentru că această relația este satisfăcută oricare ar drumul de integrare, rezultă că integrandul trebuie să fie nul, ceea ce atrage după sine următoarele egalități :

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial W_p}{\partial x} \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial W_p}{\partial y} \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial W_p}{\partial z}}$$

În aceste condiții, vectorul forță se poate exprima în modul următor :

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z = -\left(\mathbf{e}_x \frac{\partial W_p}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial W_p}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial W_p}{\partial z} \right) = -\left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) W_p$$

Pe scurt această relație se scrie sub forma :

$$\boxed{\mathbf{F} = -\nabla W_p}$$

Într-un câmp de forțe conservative, forța care acționează asupra corpului de probă este numeric egală cu gradientul energiei potențiale

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 103

Factorul $\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ este ceea ce se numeşte în matematică un **operator**, poartă numele de operatorul nabla şi este simbolizat prin semnul ∇. Aplicând operatorul nabla unei funcții scalare se obține o funcție vectorială numită **gradientul funcției scalare**.

2.6.3. ENERGIA CINETICĂ, TEOREMA VARIAȚIEI ENERGIEI CINETICE PENTRU UN PUNCT MATERIAL

Să considerăm un punct material care se mişcă accelerat sub acțiunea unei forțe rezultante externe **F**. Accelerația şi forța sunt legate prin principiul fundamental al dinamicii :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

Putem înmulți scalar expresia cu vectorul viteză :

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = m\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}m\left(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2}m\frac{d(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d(v^2)}{dt}$$

Ținând cont că viteza este prima derivată a vectorului de poziție în raport cu timpul, mai putem scrie :

$$\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d(v^2)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{m}{2}d(v^2)$$

Integrând pe traiectoria urmată de punctul material, obținem :

$$\int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{m}{2}\int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})}d(v^2) = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2}$$

Prin convenție, factorul $\frac{mv^2}{2}$ se numeşte **energia cinetică** a unui punct material, fiind o mărime de stare. Notația pe care o vom folosi pentru energia cinetică este : W_c.

Ținând cont că $\int_{(\mathbf{A})}^{(\mathbf{B})}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ este lucrul mecanic făcut de forța rezultantă la deplasarea din **A** în **B**, rezultă egalitatea :

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = L_{\mathbf{AB}}$$

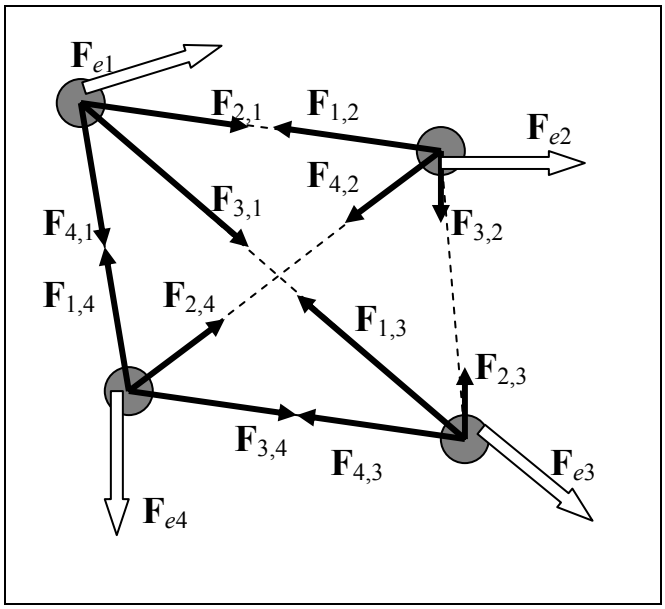
PRECIZAREA DE LA PAGINA 104

În calculele făcute pe această pagină există afirmația implicită că **masa punctului material nu depinde de viteza cu care se deplasează acesta**. Această afirmație este unul din principiile fundamentale ale mecanicii clasice şi poate fi pus la îndoială. Experiențele au dovedit că, de fapt, masa depinde de viteză, dar în condiții obişnuite ea poate fi considerată constantă.

Această ultimă egalitate exprimă matematic o teoremă a dinamicii, numită **teorema variației energiei cinetice a unui punct material**. Enunțul acestei teoreme este următorul : „*În cursul unui proces, variația energiei cinetice a unui punct material este numeric egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra sa în cursul procesului*”. Formula care exprimă matematic această teoremă este :

$$\boxed{\Delta W_{c,\mathbf{AB}} = L_{\mathbf{AB}}}$$

2.6.4. TEOREMA VARIAȚIEI ENERGIEI CINETICE PENTRU UN SISTEM DE PUNCTE MATERIALE



În figura alăturată puteți vedea patru puncte materiale care interacționează atât între ele, cât şi cu corpuri din exterior.

Într-un proces în care pozițiile punctelor materiale se modifică forțele de interacțiune între punctele materiale (adică **forțele interne**) şi forțele de interacțiune cu corpurile din afara sistemului (adică **forțele externe**) fac lucru mecanic. Teorema variației energiei cinetice poate fi aplicată separat fiecărui punct material. Astfel, de exemplu, rezultanta forțelor care acționează asupra primului punct material este :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{2,1} + \mathbf{F}_{3,1} + \mathbf{F}_{4,1} + \mathbf{F}_{e1}$$

Lucrul mecanic efectuat de această rezultantă este :

PRECIZAREA DE LA PAGINA 105

Pentru că puterea are expresia $P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$, iar :

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = \frac{m}{2}\frac{d(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})}{dt} = \frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{dW_c}{dt}$$

rezultă : $\boxed{\dfrac{dW_c}{dt} = P}$ Forma diferențială a teoremei de variație a energiei cinetice

$$L_1 = \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} = \int \mathbf{F}_{2,1} \cdot d\mathbf{r} + \int \mathbf{F}_{3,1} \cdot d\mathbf{r} + \int \mathbf{F}_{4,1} \cdot d\mathbf{r} + \int \mathbf{F}_{e1} \cdot d\mathbf{r} = \underbrace{L_{2,1} + L_{3,1} + L_{4,1}}_{L_{i1}} + L_{e1}$$

$$L_1 = L_{i1} + L_{e1}$$

Conform teoremei variației energiei cinetice, acest lucru mecanic modifică energia cinetică a primului punct material :

$$\Delta W_{c1} = L_1 = L_{i1} + L_{e1}$$

Variația energiei cinetice a unui punct material aparținând sistemului de puncte materiale este numeric egală cu suma algebrică dintre lucrul mecanic efectuat de forțele interne L_i şi lucrul mecanic făcut de forța externă L_e care acționează concomitent asupra punctului material.

Acelaşi calcul îl putem face pentru toate punctele materiale care aparțin sistemului. Deci, în general, notând prin k numărul atribuit punctului material, avem :

$$\Delta W_{c,k} = L_k = L_{i,k} + L_{e,k}$$

Dacă sistemul de puncte materiale trece de la starea **A** la starea **B**, şi dorim să explicităm mai mult relația de mai sus, rezultă :

$$\frac{m_k v_{k,\mathbf{B}}^2}{2} - \frac{m_k v_{k,\mathbf{A}}^2}{2} = L_k = L_{i,k} + L_{e,k}$$

Sumând pentru toate valorile lui k obținem :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_{k,\mathbf{B}}^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_{k,\mathbf{A}}^2}{2} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} L_k}_{L_{total}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} L_{i,k}}_{L_{i,total}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} L_{e,k}}_{L_{e,total}}$$

Suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor materiale care alcătuiesc un sistem : $\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2}$ este o mărime de stare a sistemului de puncte materiale şi se numeşte **energia cinetică totală a sistemului de puncte materiale**, sau, pe scurt, energia cinetică a sistemului. Ea se poate nota simplu prin W_c.

Utilizând definiția anterioară, ultima relație se poate scrie după cum urmează :

COMENTARIUL DE LA PAGINA 106

Energia cinetică totală a unui sistem de puncte materiale este o mărime globală, care nu furnizează indicii asupra unui component al sistemului, aşa cum averea unei comunități nu spune prea mult despre averea unui membru al ei.

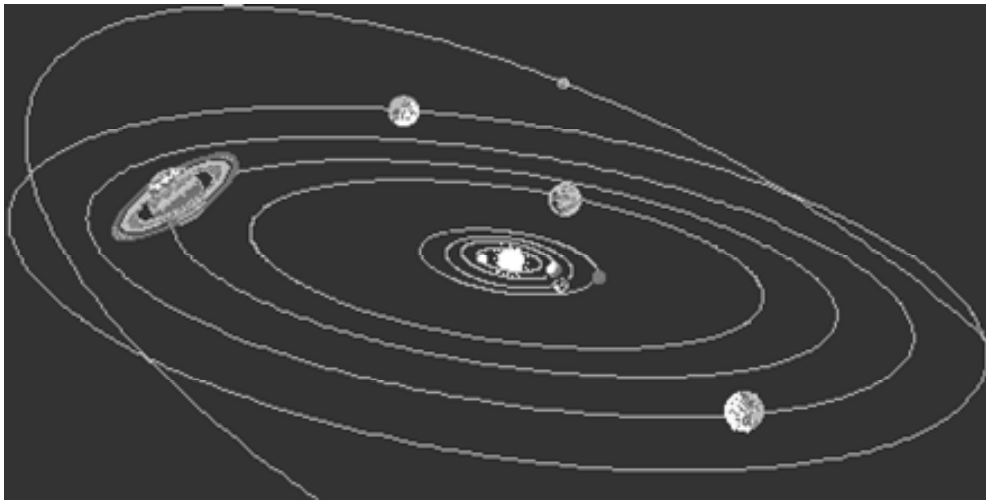
$$\Delta W_c = L_{total} = L_{i,total} + L_{e,total}$$

Teorema variației energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale

✍ În cursul unui proces, variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este numeric egală cu lucrul mecanic total efectuat de toate forțele care acționează asupra tuturor punctelor materiale, indiferent că ele reprezintă interacțiuni interne sau interacțiuni cu corpuri din exteriorul sistemului.

2.6.5. ENERGIE MECANICĂ, TEOREMA VARIAȚIEI ENERGIEI MECANICE PENTRU UN SISTEM DE PUNCTE MATERIALE

Există sisteme de puncte materiale în care se manifestă acțiunea unor forțe interne conservative.



Un exemplu în acest sens ar fi sistemul solar, la scara căruia atât planetele cât şi Soarele pot fi considerate ca puncte materiale care interacționează prin forțe gravitaționale.

OBSERVAȚIA DE LA PAGINA 107

Atât în expresia matematică a teoremei variației energiei cinetice, cât şi în alte teoreme de variație pe care le vom demonstra ulterior, observăm că membrul stâng al egalității conține *doar mărimi de stare*, iar membrul drept *doar mărimi de proces*.

Dacă în cadrul interacţiunilor care se exercită între componenţii unui sistem de puncte materiale există şi forţe conservative, lucrul mecanic total intern are două componente : lucrul forţelor conservative şi lucrul forţelor neconservative :

$$L_{i,total} = L_{i,total,conservativ} + L_{i,total,neconservativ}$$

Ştim deja că lucrul forţelor conservative este legat de variaţia energiei potenţiale a sistemului :

$$L_{i,total,conservativ} = -\Delta W_p$$

Folosind observaţia de mai sus şi revenind la expresia matematică a teoremei variaţiei energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale, putem scrie :

$$\Delta W_c = -\Delta W_p + L_{i,total,neconservativ} + L_{e,total}$$

Atât energia cinetică, cât şi energia potenţială sunt mărimi de stare, astfel încât, în procesul de modificare a stării sistemului de la **A** la **B**, se poate scrie :

$$W_{c,\mathbf{B}} - W_{c,\mathbf{A}} = -W_{p,\mathbf{B}} - W_{p,\mathbf{A}} + L_{i,total,neconservativ} + L_{e,total}$$

sau :

$$\left(W_{c,\mathbf{B}} + W_{p,\mathbf{B}}\right) - \left(W_{c,\mathbf{A}} + W_{p,\mathbf{A}}\right) = L_{i,total,neconservativ} + L_{e,total}$$

Convenim să numim suma dintre energia cinetică şi energia potenţială ale unui sistem de puncte materiale : **energie mecanică** şi s-o notăm prin W ($W = W_c + W_p$).

Prin urmare, obţinem :

$$\boxed{\Delta W = L_{i,total,neconservativ} + L_{e,total}}$$

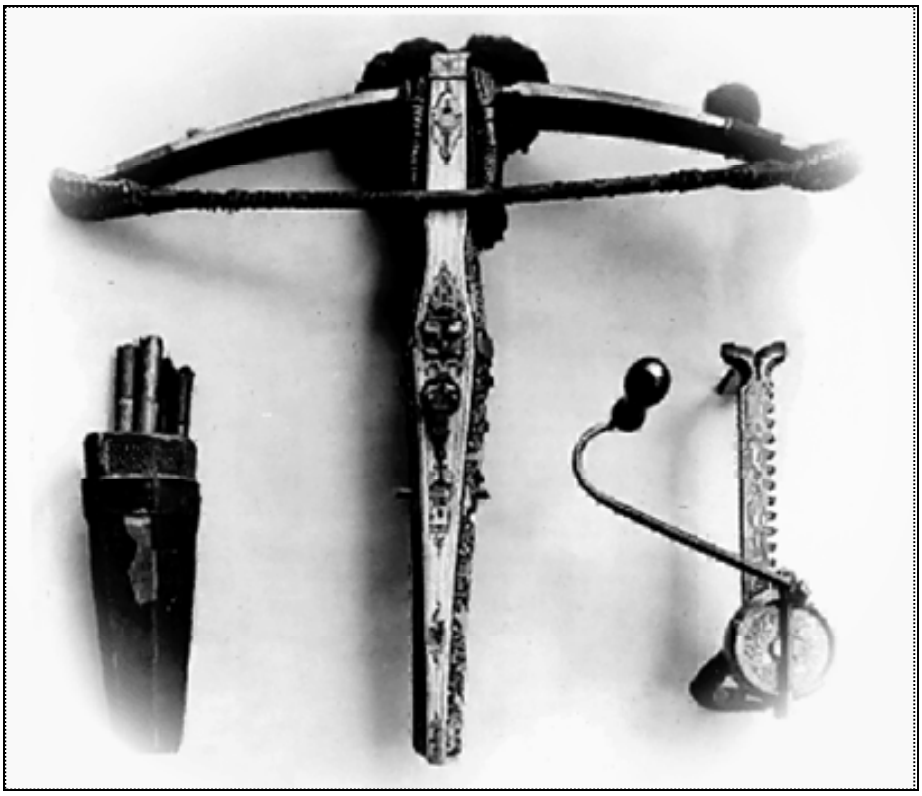
Teorema variaţiei energiei mecanice a unui sistem de puncte materiale

În cursul unui proces, variaţia energiei mecanice a unui sistem de puncte materiale este numeric egală cu lucrul mecanic total efectuat de toate forţele interne neconservative, la care se adună lucrul mecanic al tuturor forţelor care reprezintă interacţiuni cu corpuri din exteriorul sistemului.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 108

În cazul particular în care nu se exercită forţe interne neconservative, **iar sistemul este izolat de exterior** (ceea ce înseamnă că nu se exercită nici forţe externe), rezultă $\Delta W = 0$, adică **energia mecanică se conservă** (*teorema conservării energiei mecanice*).

2.6.6. IMPULS, TEOREMA VARIAȚIEI IMPULSULUI PENTRU UN PUNCT MATERIAL



În Biblie se scrie că micuțul David l-a învins, în luptă dreaptă, pe uriașul Goliath. *Cum a fost posibil* ? Simplu ! Utilizând o piatră. *Dar, de ce alții nu erau capabili de aceeaşi performanță, pentru că pietre se găseau peste tot* ? Pietre se găseau, dar David avea şi o armă : **praştia**. Aceasta îi permitea să arunce piatra cu o viteză mai mare decât aceea pe care alții o obțineau aruncând pietrele cu mâna goală. Praştia nu este singura armă care foloseşte această idee : arcurile, arbaletele (puteți vedea una în figură), puştile, se bazează toate pe principiul propulsării cu mare viteză a unui proiectil. Să examinăm arbaleta din figură. Pentru propulsarea săgeții se foloseşte, de fapt, un arc elastic cu coardă. Noutatea pe care a adus-o această armă consta în sistemul mecanic folosit pentru întinderea corzii, pe care îl zăriți în dreapta imaginii. Această invenție permitea unui om obişnuit să producă o forță de întindere cu mult mai mare decât aceea pe care ar fi putut-o realiza cu mâinile goale. *Ce „cost" avea această „amplificare" a forței umane* ? Răspunsul este : timpul ! Pentru ca săgeata să poată zvâcni din arc într-o fracțiune de secundă, sub acțiunea forței elastice, arbaletierul trebuia să rotească manivela „preț" de câteva zeci de secunde. Iată întrunite acum elementele principale ale acestei lecții : **masa şi variația de viteză** (ale proiectilului), **forța şi intervalul de timp** al aplicării forței (contribuția corzii elastice).

PRECIZAREA DE LA PAGINA 109

Ultimele reglementări prevăd înlocuirea termenului de „*impuls*" cu acela de „*cantitate de mişcare*". Vom continua, totuşi, să folosim vechea denumire, unul din motive fiind şi acela că este mai scurtă.

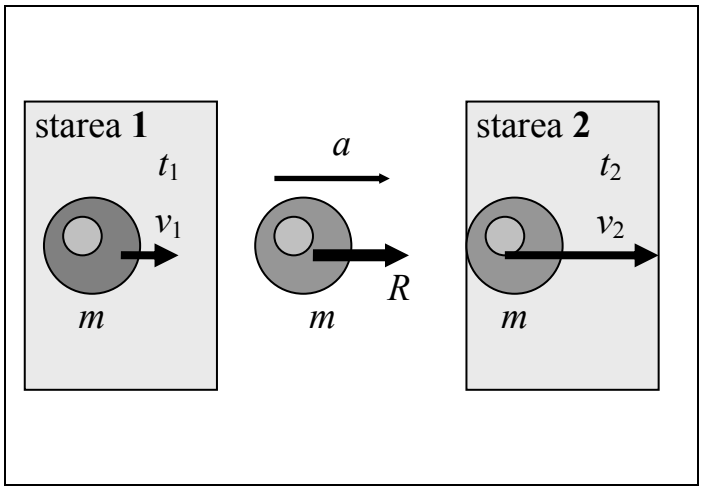


Figura alăturată vă prezintă o schemă a procesului de accelerare a unui corp :

❖ există o stare inițială, caracterizată de viteza v_1 şi momentul de timp t_1, precum şi o stare finală, caracterizată de viteza v_2 şi momentul de timp t_2

❖ în intervalul de timp (t_2 - t_1), asupra corpului acționează forța rezultantă $R(t)$, imprimându-i la fiecare moment de timp o accelerația $a(t)$.

Conform principiului al doilea al mecanicii, putem scrie :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R}$$

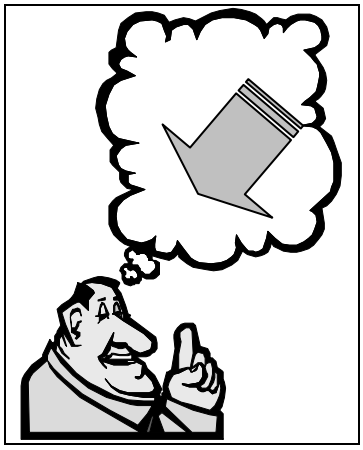
Accelerația fiind prima derivată a vitezei în raport cu timpul, relația se poate pune şi sub forma următoare :

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad m\,d\mathbf{v} = \mathbf{R}\,dt$$

Prin integrare obținem :

$$m\,\mathbf{v}_2 - m\,\mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R}(t)dt$$

Iată, reunite într-o singură relație, elementele despre care vorbeam mai devreme : masa, variația vitezei, forța şi intervalul de timp.



❖ **Masa şi viteza apar sub forma unui produs care caracterizează din punct de vedere dinamic starea de mişcare a corpului**. Acest produs este o mărime fizică care conține informație privind atât inerția corpului considerat, cât şi starea sa de mişcare. Denumirea pe care o atribuim acestei mărimi fizice este aceea de **impuls** (cantitate de mişcare).

❖ Un alt termen al relației este integrala forței rezultante în raport cu timpul : $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R}(t)dt$. **Acest termen caracterizează procesul de accelerare a corpului, adică modul de acțiune în timp al forței acceleratoare**. Prin urmare, acest termen este o mărime fizică de proces, denumită **impulsul forței**. Notația obişnuită pentru impulsul forței este H.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 110

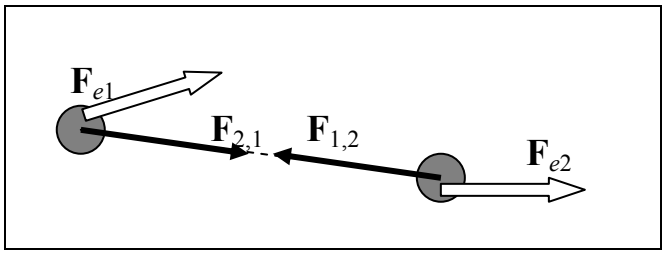
Având în vedere că masa este considerată ca fiind independentă de viteză, putem scrie $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$. În aceste condiții, rezultă egalitatea : $\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{R}}$ (forma diferențială a teoremei variației impulsului pentru un punct material).

Cu aceste definiții, relația anterioară se scrie astfel :

$\boxed{\Delta \mathbf{p} = \mathbf{H}}$ Teorema variației impulsului unui punct material

✍ În cursul unui proces, variația impulsului unui punct material este numeric egală cu impulsul forței rezultante care acționează asupra punctului material pe durata procesului.

2.6.7. TEOREMA VARIAȚIEI IMPULSULUI PENTRU UN SISTEM DE PUNCTE MATERIALE



Să luăm în discuție cel mai simplu sistem de puncte materiale : cel din figura alăturată. Fiecăruia dintre cele două puncte materiale care alcătuiesc sistemul i se poate aplica teorema variației impulsului :

$$m_1\mathbf{v}_{1,2} - m_1\mathbf{v}_{1,1} = \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{R}_1(t)dt = \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}_{2,1}(t)dt + \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}_{e1}(t)dt$$

$$m_2\mathbf{v}_{2,2} - m_2\mathbf{v}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{R}_2(t)dt = \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}_{1,2}(t)dt + \int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}_{e2}(t)dt$$

Adunând cele două relații, obținem :

$$(m_1\mathbf{v}_{1,2} + m_2\mathbf{v}_{2,2}) - (m_1\mathbf{v}_{1,1} + m_2\mathbf{v}_{2,1}) = \int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{R}_1(t) + \mathbf{R}_1(t))dt = \int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{F}_{2,1}(t) + \mathbf{F}_{1,2}(t))dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{F}_{e1}(t) + \mathbf{F}_{e2}(t))dt$$

Ce comentarii putem face ?

❖ Mai întâi, forțele $\mathbf{F}_{1,2}$ şi $\mathbf{F}_{2,1}$ au calitatea de a fi în relația acțiune-reacțiune, fiind egale în modul, având aceeaşi direcție şi sensuri opuse. Deci $\mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{2,1} = 0$.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 111

Unitatea de măsură a impulsului în *SI* se numeşte **kilogram metru pe secundă** :

$$[p]_{SI} = [m]_{SI}[v]_{SI} = \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Unitatea de măsură a impulsului forței este N·s, ceea ce, dimensional vorbind, este acelaşi lucru cu kg m/s.

❖ Suma vectorială $\mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{e2}$ reprezintă rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului de puncte materiale : $\mathbf{R}_e$.

❖ Suma vectorială $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ este o mărime de stare care caracterizează sistemul de puncte materiale, pe care convenim s-o numim **impulsul total al sistemului de puncte materiale** şi s-o notăm cu **p**.

Ținând cont de aceste comentarii, rezultă :

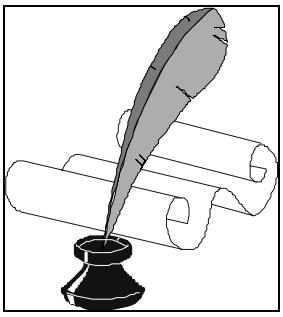
$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{R}_e(t)dt$$

Relația mai poate fi scrisă şi sub forma următoare, fiind valabilă pentru un sistem format din orice număr de puncte materiale :

$$\boxed{\Delta\mathbf{p} = \mathbf{H}_e}$$

Teorema variației impulsului unui sistem de puncte materiale

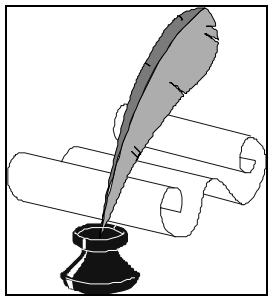
✍ În cursul unui proces, variația impulsului unui sistem de puncte materiale este numeric egală cu impulsul forței rezultante externe care acționează asupra sistemului de puncte materiale pe durata procesului.



✍ **Viteza centrului de masă al unui sistem de puncte materiale** este raportul dintre impulsul total al sistemului şi masa sa totală :

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{v}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\mathbf{r}}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

✍ Integrând viteza centrului de masă în raport cu timpul, putem calcula **vectorul de poziție al centrului de masă**. Invers, prin derivarea vitezei centrului de masă se obține **accelerația centrului de masă**.



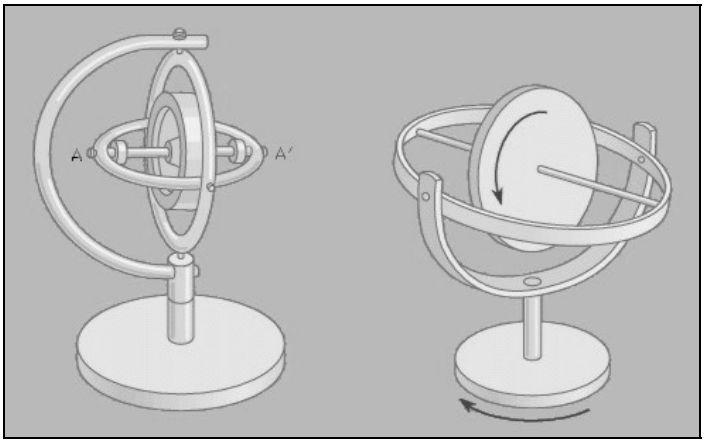
PRECIZAREA DE LA PAGINA 112

Teorema variației impulsului unui sistem de puncte materiale poate fi scrisă şi sub forma diferențială :

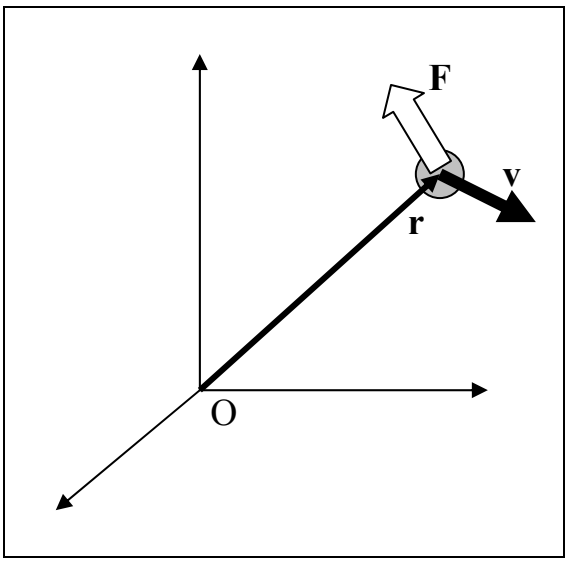
$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{R}_e}$$

având enunțul : viteza de variație a impulsului total al unui sistem de puncte materiale este numeric egală cu rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului.

2.6.8. MOMENT CINETIC, MOMENTUL FORȚEI, TEOREMA VARIAȚIEI MOMENTULUI CINETIC PENTRU UN PUNCT MATERIAL



Deşi atât de diferite, imaginile de mai sus –sistemul solar, aruncătorul de ciocan şi giroscopul care a detronat busola şi este folosit până şi la pilotarea automată a avioanelor – sunt legate prin subiectul acestei lecții.



Fie un punct material, care, la un moment dat, se deplasează cu viteza **v** şi se află sub acțiunea unei forțe **F**. Poziția punctului material se raportează la punctul fix O (pe care-l vom numi **pol**) prin vectorul de poziție **r**. Fireşte, în aceste condiții, este valabil principiul fundamental al dinamicii :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{R}(t) \quad \Leftrightarrow \quad m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{R}(t)$$

Putem înmulți vectorial fiecare membru al acestei egalități cu vectorul de poziție :

PRECIZAREA DE LA PAGINA 113

În cazul particular în care sistemul este izolat de exterior ($\mathbf{R}_e = 0$) rezultă $\Delta\mathbf{p} = 0$, adică **impulsul se conservă** (*teorema conservării impulsului*).

$$m\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{r}\times\mathbf{R}(t)$$

Membrul stâng al ecuației se poate prelucra după cum urmează :

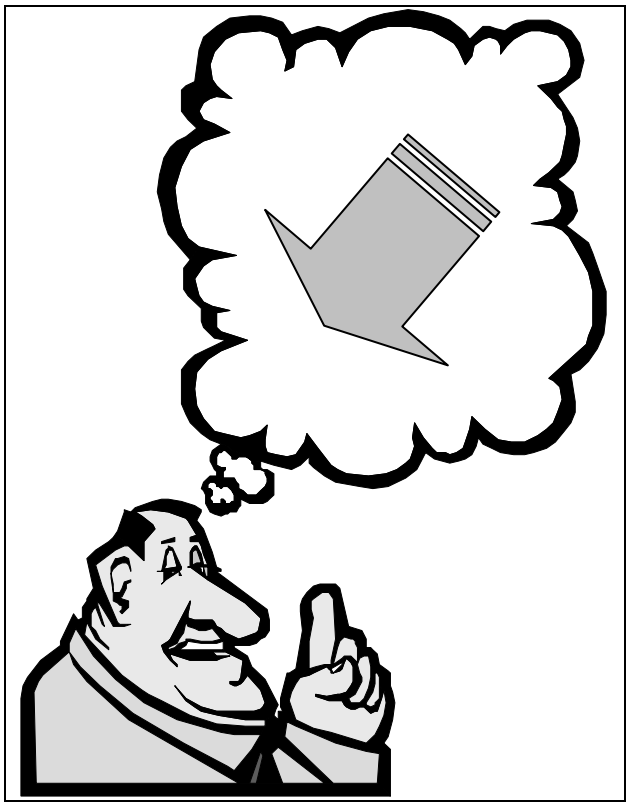
$$m\mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}=m\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})-\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{v}\right]=m\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})-\underbrace{\mathbf{v}\times\mathbf{v}}_{0}\right]=m\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$$

Înlocuind în ecuație, rezultă :

$$m\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})=\mathbf{r}\times\mathbf{R}(t)\quad\Rightarrow\quad m\,d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})=(\mathbf{r}\times\mathbf{R}(t))dt$$

Relația se poate integra, obținându-se :

$$m(\mathbf{r}_2\times\mathbf{v}_2)-m(\mathbf{r}_1\times\mathbf{v}_1)=\int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{r}\times\mathbf{R}(t))dt$$



❖ **Masa, viteza şi vectorul de poziție apar sub forma unui termen** ($m\mathbf{r}\times\mathbf{v}$) **care caracterizează din punct de vedere dinamic starea de mişcare a corpului şi poziția sa**. Acest termen este o mărime fizică de stare care conține informație privind inerția corpului considerat, starea de mişcare şi poziția sa. Atribuim acestei mărimi fizice denumirea de **moment cinetic** şi o notăm cu l.

❖ Un alt termen al relației este integrala produsului vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței rezultante şi vectorul forță în raport cu timpul : $\int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{r}\times\mathbf{R}(t))dt$. **Factorul** $\mathbf{r}\times\mathbf{R}(t)$ **caracterizează procesul de accelerare a corpului, adică modul de acțiune în timp şi în spațiu al forței acceleratoare**. Acest factor este o mărime fizică, denumită **momentul forței**. Notația obişnuită pentru momentul forței este M. Integrala momentului forței în raport cu timpul este o mărime fizică de proces.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 114

Deoarece $m\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v})=\frac{d}{dt}[m(\mathbf{r}\times\mathbf{v})]=\frac{d\mathbf{l}}{dt}$, rezultă : $\boxed{\frac{d\mathbf{l}}{dt}=\mathbf{M}}$

Relația exprimă **forma diferențială a teoremei variației momentului cinetic pentru un punct material**. Enunțul este :

„În raport cu un pol dat, viteza de variație a momentului cinetic al unui punct material este numeric egală cu momentul forței rezultante care acționează asupra punctului material”.

❖ Momentul cinetic este un vector perpendicular pe planul format de raza vectoare şi viteză, iar momentul forţei este un vector perpendicular pe planul format de raza vectoare şi forţă. Atât sensul momentului cinetic cât şi sensul momentului forţei se determină cu regula burghiului drept.

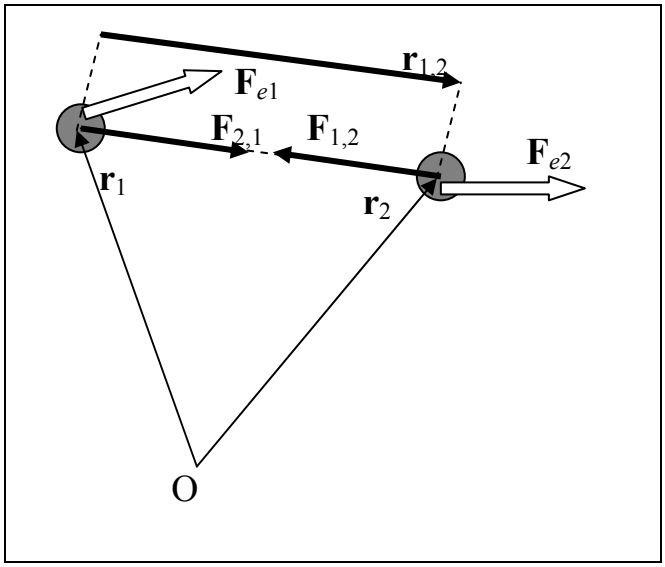
Cu aceste precizări, putem scrie :

$$\Delta \mathbf{l} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\, dt$$

Teorema variaţiei momentului cinetic pentru un punct material

✍ În cursul unui proces şi în raport cu un anumit pol, variaţia momentului cinetic al unui punct material este numeric egală cu integrala momentului forţei în raport timpul.

2.6.9. TEOREMA VARIAŢIEI MOMENTULUI CINETIC PENTRU UN SISTEM DE PUNCTE MATERIALE



Să luăm în discuţie cel mai simplu sistem de puncte materiale : cel din figura alăturată. Fiecăruia dintre cele două puncte materiale care alcătuiesc sistemul i se poate aplica teorema momentului cinetic :

$$m_1(\mathbf{r}_{1,2} \times \mathbf{v}_{1,2}) - m_1(\mathbf{r}_{1,1} \times \mathbf{v}_{1,1}) = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{2,1})\, dt + \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{e1})\, dt$$

INFORMAŢIA DE LA PAGINA 115

Unitatea de măsură a momentului cinetic este :

$$[l]_{SI} = [m]_{SI}[v]_{SI}[r]_{SI} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

Unitatea de măsură a momentului forţei este :

$$[M]_{SI} = [F]_{SI}[r]_{SI} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

Dimensional, cele două unităţi de măsură sunt echivalente.

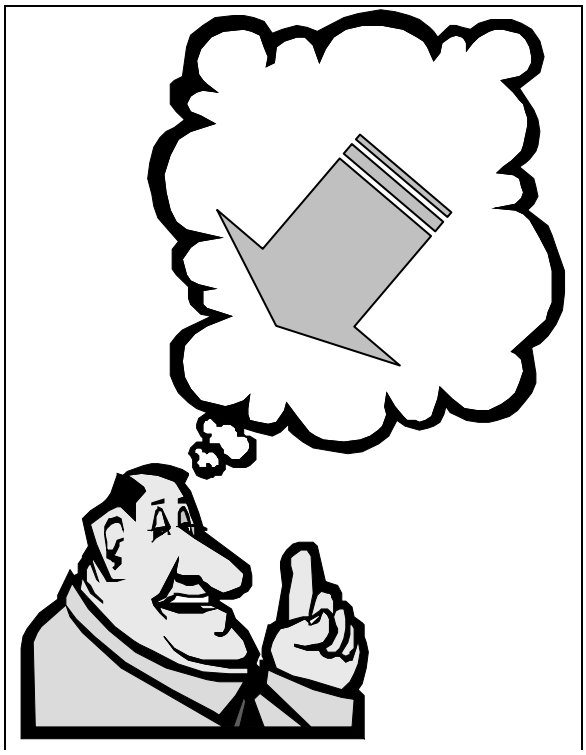
$$m_2(\mathbf{r}_{2,2}\times\mathbf{v}_{2,2})-m_2(\mathbf{r}_{2,1}\times\mathbf{v}_{2,1})=\int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_{1,2})dt+\int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_{e2})dt$$

Adunând cele două relații, obținem :

$$[m_1(\mathbf{r}_{1,2}\times\mathbf{v}_{1,2})+m_2(\mathbf{r}_{2,2}\times\mathbf{v}_{2,2})]-[m_1(\mathbf{r}_{1,1}\times\mathbf{v}_{1,1})+m_2(\mathbf{r}_{2,1}\times\mathbf{v}_{2,1})]=$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_{2,1})+[(\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_{1,2})]dt+\int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_{e1})+[(\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_{e2})]dt$$

sau :

$$(\mathbf{l}_{1,2}+\mathbf{l}_{2,2})-(\mathbf{l}_{1,1}+\mathbf{l}_{2,1})=\int_{t_1}^{t_2}[(\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_{2,1})+(\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_{1,2})]dt+\int_{t_1}^{t_2}(\mathbf{M}_{e1}+\mathbf{M}_{e2})dt$$



❖ Suma vectorială a momentelor cinetice ale tuturor punctelor materiale care alcătuiesc un sistem este o mărime de stare care caracterizează sistemul şi care se numeşte **moment cinetic total** : $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{l}_k=\mathbf{l}$.

❖ Suma vectorială a momentelor tuturor forțelor externe care acționează asupra tuturor punctelor materiale care alcătuiesc un sistem este o mărime fizică vectorială care se numeşte **momentul total al forțelor externe**: $\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}_{e,k}=\mathbf{M}_e$

❖ Forțele de interacțiune $\mathbf{F}_{1,2}$ şi $\mathbf{F}_{2,1}$ au aceeaşi direcție – direcție care este aceeaşi cu direcția care uneşte cele două puncte materiale – şi sensuri opuse : $\mathbf{F}_{1,2}=-\mathbf{F}_{2,1}$.

❖ Vectorul $\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_{1,2}$ este paralel cu forțele de interacțiune $\mathbf{F}_{1,2}$ şi $\mathbf{F}_{2,1}$.

Cu aceste precizări, putem scrie :

$$\mathbf{l}_2-\mathbf{l}_1=\int_{t_1}^{t_2}[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{F}_{1,2}]dt+\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}_e dt=\int_{t_1}^{t_2}\underbrace{(\mathbf{r}_{1,2}\times\mathbf{F}_{1,2})}_{0}dt+\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}_e dt=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{M}_e dt$$

COMENTARIUL DE LA PAGINA 116

Într-un câmp de forțe centrale : $\mathbf{R}(\mathbf{r})=R(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$ (în care polul coincide cu centrul câmpului), există relația $\mathbf{r}\times\mathbf{R}=0$, astfel încât: $\frac{d\mathbf{l}}{dt}=0$, ceea ce înseamnă că momentul cinetic este constant în timp, consecința fiind că traiectoria este plană.

În concluzie :

$$\Delta \mathbf{l} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_e \, dt$$

Teorema variației momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale

✍ În cursul unui proces şi în raport cu un pol dat, variația momentului cinetic total al unui sistem de puncte materiale este numeric egală cu integrala în raport cu timpul a momentului rezultant al forțelor externe care acționează asupra punctelor materiale ce constituie sistemul.

UN EXEMPLU

Aruncând o monedă vertical în sus, ca şi personajul din figura alăturată, constatați că ea continuă să se învârtească, fără ca rotația ei să fie afectată de gravitație. *De ce* ? Pentru a răspunde să calculăm mai întâi momentul forțelor de greutate care acționează asupra tuturor moleculelor ce compun moneda :

$$\mathbf{M}_e = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{g} = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{r}_k \right) \times \mathbf{g} = m\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{g}$$

Vectorul de poziție al centrului de masă $\mathbf{r}_{CM}$ variază după legea :

$$\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{r}_{0,CM} + \mathbf{v}_{0,CM}(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{g}(t - t_0)^2$$

Luând polul în punctul în care se afla centrul de masă la momentul aruncării ($\mathbf{r}_{0,CM} = 0$) şi pentru că aruncarea este pe verticală ($\mathbf{v}_{0,CM} \parallel \mathbf{g}$) rezultă :

$$m\mathbf{r}_{CM} \times \mathbf{g} = \underbrace{(\mathbf{v}_{0,CM} \times \mathbf{g})}_{0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\underbrace{(\mathbf{g} \times \mathbf{g})}_{0}(t - t_0)^2 = 0$$

Deoarece momentul rezultant extern $\mathbf{M}_e$ este permanent egal cu zero, rezultă :

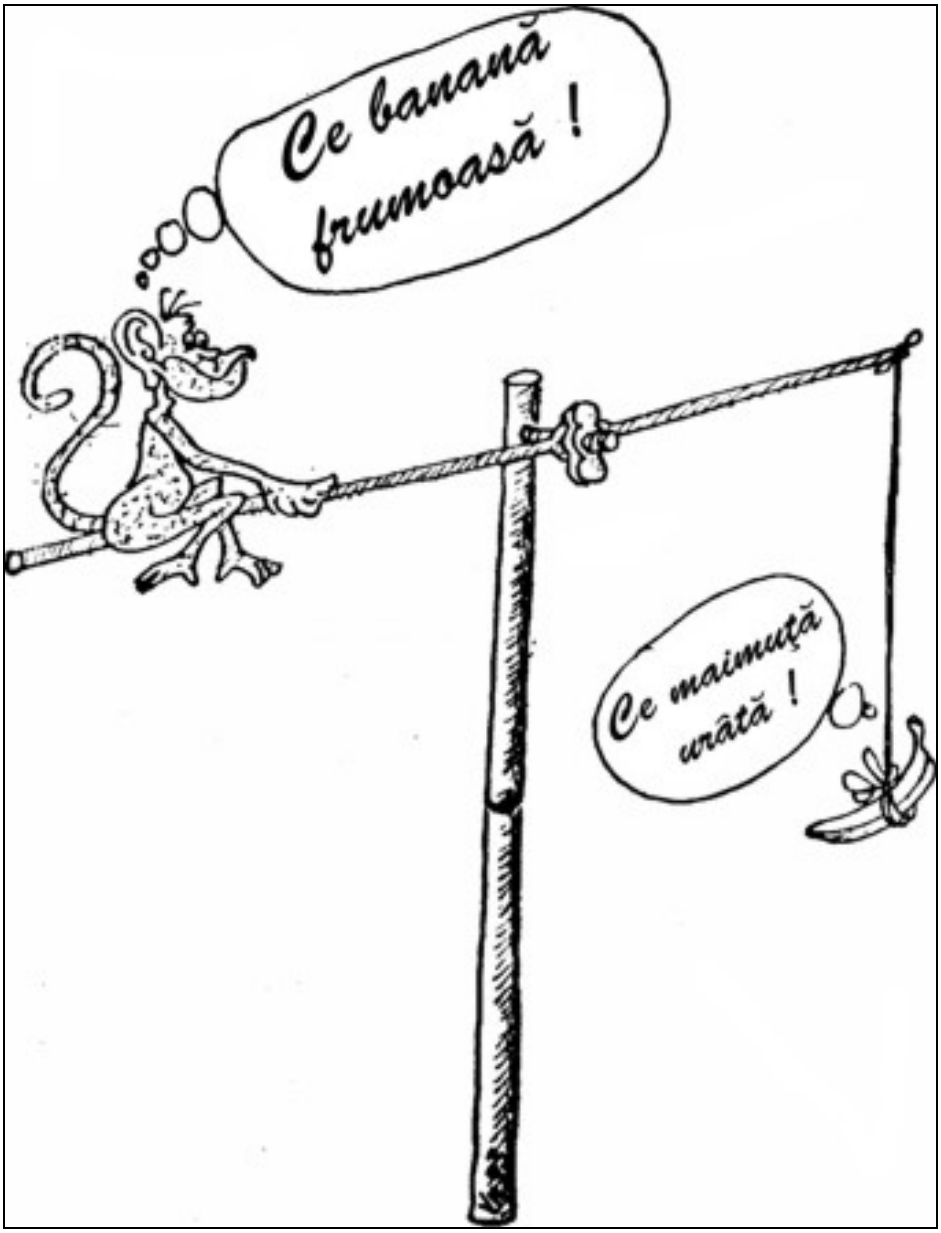
$$\Delta \mathbf{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{l} = const$$

Concluzia este că momentul cinetic al monedei este constant în timp (se conservă).

PRECIZAREA DE LA PAGINA 117

În cazul particular în care sistemul este izolat de exterior ($\mathbf{M}_e = 0$) rezultă $\Delta \mathbf{l} = 0$, adică **momentul cinetic se conservă** (*teorema conservării momentului cinetic*).

2.7. GRADE DE LIBERTATE, COORDONATE GENERALIZATE



Maimuța de mai sus pare mai încântată la vederea bananei, decât banana la vederea maimuței !

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 118

Întrebarea este : puteți preciza fără a rezolva problema (deci fără demonstrație) dacă maimuța, fără a se mişca din loc, poate ajunge la banană sau nu ?

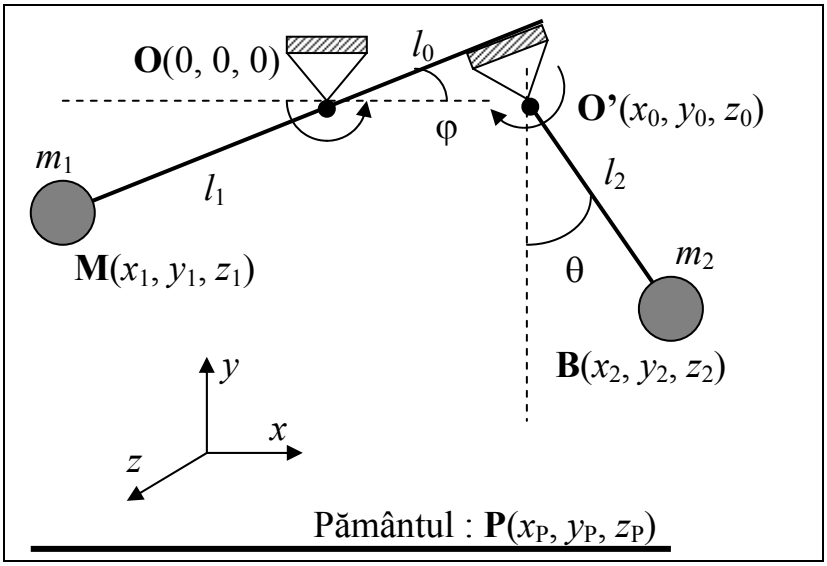
Cu toate acestea, pentru a mânca banana, maimuța trebuie să rezolve *practic* o problemă de mecanică şi nu cred că-şi va frământa capul să găsească soluția teoretică. Noi, fiind aşezați cu o cracă mai sus (în arborele evoluției desigur !) ar trebui să putem determina *teoretic* dacă maimuța poate sau nu ajunge la banană. Pentru a ne pronunța în acest sens va trebui să mai simplificăm puțin lucrurile. Şi iată simplificările :

❖ Vom considera atât maimuța cât şi banana ca puncte materiale, de mase m_1, respectiv m_2.

❖ Vom neglija masa tijei orizontale şi a sforii. De asemenea vom neglija frecările. Alte aspecte (precum ar fi gândurile maimuței) vor fi pur şi simplu trecute cu vederea.

❖ Ne alegem un sistem de axe de coordonate, astfel încât orice punct luat în considerare va fi caracterizat de trei coordonate.

❖ Reprezentarea schematică a problemei este înfățişată în figura de mai jos. Punctele cele mai importante de care ne vom ocupa sunt cinci : **O**, **O'**, **M**, **B** şi **P**.



✍ În general, orice punct material liber are posibilitatea de a se mişca după oricare dintre cele trei dimensiuni ale spațiului. Din acest motiv, spunem că **un punct material liber are trei grade de libertate de mişcare**.

Cu toate acestea, există situații în care libertatea de mişcare a unui punct material este îngrădită. De exemplu, banana din problema noastră este ataşată de o sfoară care o împiedică să se depărteze arbitrar de mult de punctul **O**'.

✍ Dacă libertatea de mişcare a unui punct material este îngrădită printr-un mijloc sau altul, spunem că el este un **punct material cu legături**, iar gradele sale de libertate de mişcare se diminuează.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 119

Legăturile se pot clasifica astfel :

❖ **Holonome** dacă nu depind de viteză (**neholonome** în caz contrar)

❖ **Scleronome** dacă nu depind de timp (**reonome** în caz contrar)

❖ **Bilaterale** dacă sunt exprimate prin ecuații (**unilaterale** dacă sunt exprimate prin inecuații)

Să analizăm în continuare situația celor cinci puncte reprezentative pentru problema noastră :

$x_P = const$ $y_P = const$ $z_P = const$ Pământul este considerat fix. El nu are nici un grad de libertate.	$x_O = 0$ $y_O = 0$ $z_O = 0$ Punctul **O** este fixat. Nici acesta nu are nici un grad de libertate.	$x_0^2 + y_0^2 = l_0^2$ $z_0 = 0$ Partea din dreapta a tijei (**O'**) se roteşte în jurul lui **O**, în planul *xOy*. **O'** are un singur grad de libertate.	$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$ $z_1 = 0$ Partea din stânga a tijei (**M**) se roteşte în jurul lui **O**, în planul *xOy*. **M** are un singur grad de libertate.	$(x_2 - x_0)^2 +$ $+ (y_2 - y_0)^2 = l_2^2$ $z_2 = 0$ Punctul **B** al sforii se roteşte în jurul punctului **O'**, în planul *xOy*. **B** are un singur grad de libertate.

Dacă ne-am mulțumi cu enumerarea acestor constrângeri am greşi. Mai există una : **tija nu se îndoaie în jurul punctului O**, **deci distanța între M** şi **O' este constantă**:

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = (l_0 + l_1)^2$$

Aceasta înseamnă că unul dintre cele două puncte (să spunem **O'**) mai pierde un grad de libertate.

Numărul gradelor de libertate ale unui sistem de puncte materiale este egal cu suma numerelor de grade de libertate ale tuturor punctelor care alcătuiesc sistemul.

Să concluzionăm acum în privința sistemului pe care-l discutăm :

Punctul	Grade de libertate potențiale	Constrângeri (legături)	Grade de libertate rămase
P	3	3	0
O	3	3	0
O'	3	2+1	0
M	3	2	1
B	3	2	1
Numărul total de grade de libertate ale sistemului			2

PRECIZAREA DE LA PAGINA 120

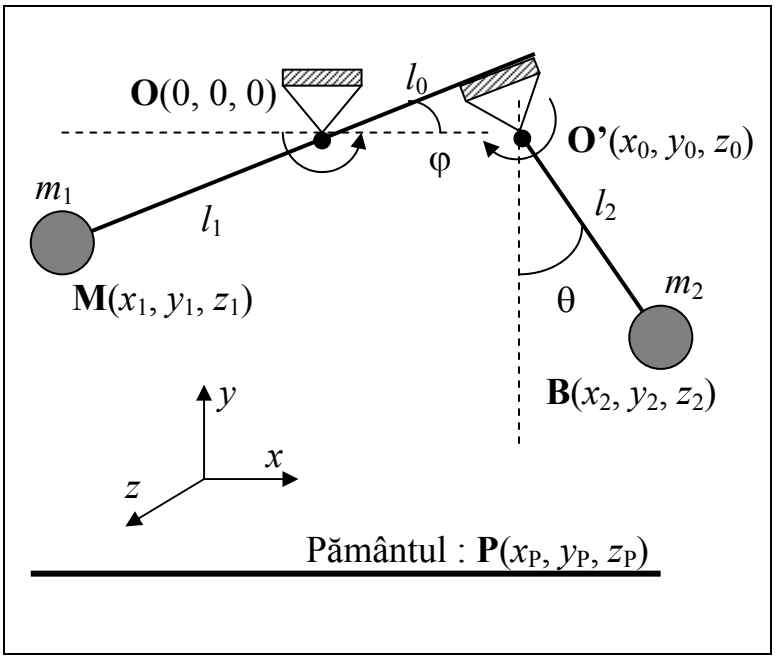
În text, se scrie că legătura între punctele **O'** şi **B** este asigurată printr-o „*sfoară*". Utilizând acest cuvânt, am introdus două posibile erori : nu este obligatoriu ca punctul **B** să rămână în planul *xOy* şi nu este obligatoriu ca distanța **O'B** să rămână constantă. De aceea „*sfoară*" ar trebui înțeles ca „*tijă rigidă care se poate deplasa doar în planul xOy*".

Din cele spuse se poate trage o concluzie : fiind dat un sistem format din N puncte materiale, numărul de grade de libertate al sistemului este egal cu diferența între triplul numărului de puncte şi numărul de legături :
$p = 3N - l$

O altă concluzie este aceea că într-un sistem de puncte materiale cu legături numărul variabilelor de poziție independente care caracterizează sistemul este mai mic decât numărul total al coordonatelor punctelor care alcătuiesc sistemul.

Ne punem în acest moment întrebările :

CARE OARE DINTRE COORDONATELE EXISTENTE TREBUIE ALESE CA VARIABILE INDEPENDENTE CONVENABILE PENTRU A CARACTERIZA SISTEMUL ? EXISTĂ MOTIVE CA UNELE DINTRE ELE SĂ FIE PREFERATE ALTORA ?



În cazul pe care-l discutăm, nu putem avea motive convingătoare pentru a alege între x_1 şi y_1, sau x_2 şi y_2. Aceasta poate însemna că oricare alegere ar fi la fel de bună sau la fel de proastă**. Mai mult dacă ne-am opri doar la aceste variante am face o alegere destul de proastă, în sensul că nu ar fi *convenabilă* pentru rezolvarea problemei**. Pentru ca variabilele independente pe care le vom folosi să fie şi *convenabile*, vom recurge la o altă soluție : ele vor fi unghiurile φ şi θ din desen.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 121

Alegerea unghiurilor drept coordonate generalizate este recomandabilă mai ales în situațiile în care legăturile permit doar mişcări de rotație în jurul unor puncte date.

Cu ajutorul acestor două variabile putem exprima poziţiile, vitezele şi acceleraţiile celor cinci puncte reprezentative :

$$x_P = const \quad ; \quad \dot{x}_P = 0 \quad ; \quad \ddot{x}_P = 0$$
$$y_P = const \quad ; \quad \dot{y}_P = 0 \quad ; \quad \ddot{y}_P = 0$$
$$z_P = const \quad ; \quad \dot{z}_P = 0 \quad ; \quad \ddot{z}_P = 0$$

$$x_O = 0 \quad ; \quad \dot{x}_O = 0 \quad ; \quad \ddot{x}_O = 0$$
$$y_O = 0 \quad ; \quad \dot{y}_O = 0 \quad ; \quad \ddot{y}_O = 0$$
$$z_O = 0 \quad ; \quad \dot{z}_O = 0 \quad ; \quad \ddot{z}_O = 0$$

$$x_0 = l_0 \cos\varphi \quad ; \quad \dot{x}_0 = -l_0\dot{\varphi}\sin\varphi \quad ; \quad \ddot{x}_0 = -l_0\ddot{\varphi}\sin\varphi - l_0\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$
$$y_0 = l_0 \sin\varphi \quad ; \quad \dot{y}_0 = l_0\dot{\varphi}\cos\varphi \quad ; \quad \ddot{y}_0 = l_0\ddot{\varphi}\cos\varphi - l_0\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$
$$z_0 = 0 \quad ; \quad \dot{z}_0 = 0 \quad ; \quad \ddot{z}_0 = 0$$

$$x_1 = -l_1 \cos\varphi \quad ; \quad \dot{x}_1 = l_1\dot{\varphi}\sin\varphi \quad ; \quad \ddot{x}_1 = l_1\ddot{\varphi}\sin\varphi + l_1\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$
$$y_1 = -l_1 \sin\varphi \quad ; \quad \dot{y}_1 = -l_1\dot{\varphi}\cos\varphi \quad ; \quad \ddot{y}_1 = -l_1\ddot{\varphi}\cos\varphi + l_1\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$
$$z_1 = 0 \quad ; \quad \dot{z}_1 = 0 \quad ; \quad \ddot{z}_1 = 0$$

$$x_2 = l_0 \cos\varphi + l_2 \sin\theta \quad ; \quad \dot{x}_2 = -l_0\dot{\varphi}\sin\varphi + l_2\dot{\theta}\cos\theta$$
$$\ddot{x}_2 = -l_0\ddot{\varphi}\sin\varphi - l_0\dot{\varphi}^2\cos\varphi + l_2\ddot{\theta}\cos\theta - l_2\dot{\theta}^2\sin\theta$$
$$y_2 = l_0 \sin\varphi - l_2 \cos\theta \quad ; \quad \dot{y}_2 = l_0\dot{\varphi}\cos\varphi + l_2\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\ddot{y}_2 = -l_1\ddot{\varphi}\cos\varphi + l_1\dot{\varphi}^2\sin\varphi + l_2\ddot{\theta}\sin\theta + l_2\dot{\theta}^2\cos\theta$$
$$z_2 = 0 \quad ; \quad \dot{z}_2 = 0 \quad ; \quad \ddot{z}_2 = 0$$

Parametrii φ şi θ se numesc **coordonate generalizate**, iar $\dot{\varphi}$ şi $\dot{\theta}$ se numesc **viteze generalizate**. **Coordonatele şi vitezele generalizate sunt variabile independente**.

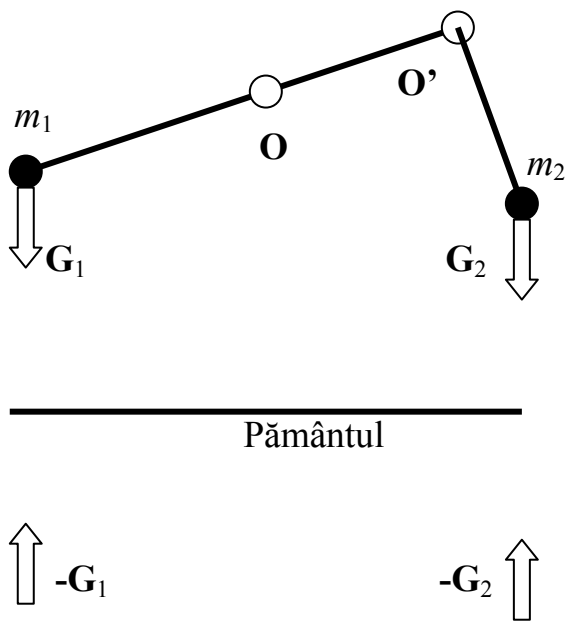
PRECIZAREA DE LA PAGINA 122

Coordonatele generalizate nu reprezintă neapărat lungimi. De aceea, ele nu se măsoară în mod necesar în metri.

✍ În general, un sistem de puncte materiale cu p grade de libertate este caracterizat prin p coordonate generalizate şi p viteze generalizate, care sunt variabile independente. Din acest motiv, starea sistemului poate fi reprezentată printr-un punct într-un spaţiu cu $2p$ dimensiuni care se numeşte **spaţiul configuraţiilor**.

Aici se încheie ceea ce trebuia să vă spun despre coordonatele generalizate şi spaţiul configuraţiilor. Cu toate acestea, nu aţi aflat încă ce se întâmplă cu personajele noastre : banana şi maimuţa. Nu aţi aflat pentru că până acum am încercat doar să simplificăm situaţia reală şi să creăm cadrul în care problema ar putea fi rezolvată. Dacă mai aveţi răbdare, puteţi citi în continuare şi cum se rezolvă problema. Dacă nu, nu !

REZOLVAREA PROBLEMEI



Orice problemă de dinamică înseamnă găsirea legilor de mişcare ale corpurilor materiale ştiindu-se care sunt forţele care acţionează asupra lor la orice moment de timp.

Din acest punct de vedere, suntem siguri că orice corp a cărui masă nu este neglijabilă se află sub acţiunea forţei de greutate (vezi şi schiţa alăturată). Dacă $\mathbf{G}_1$ şi $\mathbf{G}_2$ ar fi singurele forţe prezente în sistem, atunci ar trebui să fie valabile relaţiile :

$$\ddot{x}_1 = 0 \quad ; \quad \ddot{y}_1 = -g \quad ; \quad \ddot{z}_1 = 0$$

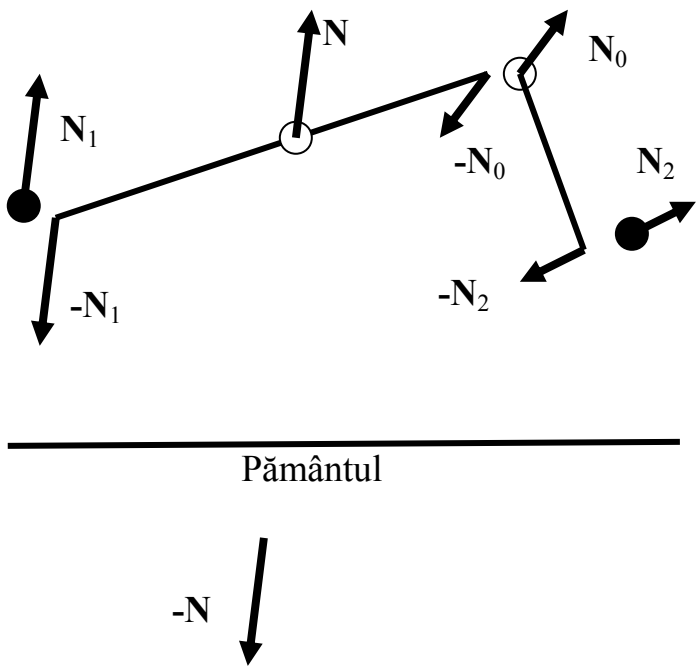
$$\ddot{x}_2 = 0 \quad ; \quad \ddot{y}_2 = -g \quad ; \quad \ddot{z}_2 = 0$$

Dacă vă uitaţi pe pagina precedentă vedeţi că lucrurile nu stau de loc aşa. *Ce să însemne aceasta* ? Explicaţia nu poate fi decât următoarea :

Existenţa legăturilor este acompaniată de apariţia **forţelor de legătură**, care se manifestă ca forţe de interacţiune între componenţii sistemului.

INFORMAŢIA DE LA PAGINA 123

Printre forţele de legătură cel mai des întâlnite se pot enumera forţele normale, tensiunile, forţele elastice, forţele de frecare.



Forțele de legătură apar ca perechi acțiune – reacțiune. În cazul problemei noastre, forțele de legătură reprezentative sunt înfățișate în schița alăturată. Trebuie să ştiți că **valorile şi orientările acestor forțe nu sunt cunoscute înainte de rezolvarea problemei** (spre deosebire, de exemplu, de forța de greutate).

Sistemul despre care discutăm poate fi caracterizat ca un sistem izolat de exterior, în interiorul căruia nu se exercită forțe de frecare.

Date fiind aceste calități ale sistemului, rezultă, prin prisma teoremelor dinamicii, **conservarea impulsului total, energiei mecanice totale şi a momentului cinetic total**. Cu toate acestea, legile de conservare **nu** sunt valabile şi pentru fiecare component al sistemului în parte.

Sistemul are o energie cinetică totală :

$$W_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) =$$

$$= \frac{m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left(l_0^2 \dot{\varphi}^2 + l_2^2 \dot{\theta}^2 + 2 l_0 l_2 \dot{\varphi}\dot{\theta} \sin(\theta - \varphi)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_0^2\right)\dot{\varphi}^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 + 2 m_2 l_0 l_2 \dot{\varphi}\dot{\theta} \sin(\theta - \varphi)\right]$$

Observăm că energia cinetică totală este o funcție cere depinde de coordonatele şi vitezele generalizate : $W_c = W_c(\varphi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$. Mai mult, **în funcție de vitezele generalizate energia cinetică este o formă pătratică simetrică**.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 124

Ce înseamnă că energia cinetică este o formă pătratică simetrică care depinde de vitezele generalizate ? Fiind date vitezele generalizate $q_1, q_2, \ldots q_p$, energia cinetică are următoarea expresie generală :

$$W_c = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} C_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \quad ; \quad C_{ij} = C_{ji} \quad \forall i, j$$

Sistemul are şi o energie potenţială totală :

$$W_p(\varphi,\theta) = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 = -m_1 g l_1 \sin\varphi + m_2 g\left(l_0 \sin\varphi - l_2 \cos\theta\right) =$$
$$= \left(m_2 l_0 - m_1 l_1\right) g \sin\varphi - m_2 g l_2 \cos\theta$$

Energia potenţială depinde *doar* de coordonatele generalizate. Ea nu depinde de vitezele generalizate.

Deoarece energia mecanică totală se conservă, rezultă :

$$\frac{d}{dt}\left(W_c\left(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta}\right) + W_p(\varphi,\theta)\right) = 0$$

Să examinăm consecinţele acestei relaţii. Vom calcula mai întâi derivata energiei potenţiale :

$$\frac{dW_p(\varphi,\theta)}{dt} = \frac{\partial W_p(\varphi,\theta)}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial W_p(\varphi,\theta)}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\varphi}\frac{\partial W_p}{\partial\varphi} + \dot{\theta}\frac{\partial W_p}{\partial\theta}$$

Urmează calculul derivatei energiei cinetice :

$$\frac{dW_c\left(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta}\right)}{dt} = \frac{\partial W_c\left(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta}\right)}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial W_c\left(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta}\right)}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} +$$
$$+ \frac{\partial W_c\left(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta}\right)}{\partial\dot{\varphi}}\frac{d\dot{\varphi}}{dt} + \frac{\partial W_c\left(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta}\right)}{\partial\dot{\theta}}\frac{d\dot{\theta}}{dt} =$$
$$= \dot{\varphi}\frac{\partial W_c}{\partial\varphi} + \dot{\theta}\frac{\partial W_c}{\partial\theta} + \ddot{\varphi}\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\varphi}} + \ddot{\theta}\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\theta}} =$$
$$= \dot{\varphi}\frac{\partial W_c}{\partial\varphi} + \dot{\theta}\frac{\partial W_c}{\partial\theta} + \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \dot{\varphi}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\varphi}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\theta}}\right) - \dot{\theta}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\theta}}\right) =$$
$$= \dot{\varphi}\left[\frac{\partial W_c}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\varphi}}\right)\right] + \dot{\theta}\left[\frac{\partial W_c}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\theta}}\right)\right] + \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\varphi}} + \dot{\theta}\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\theta}}\right)$$

Se poate verifica cu uşurinţă că :

$$\dot{\varphi}\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\varphi}} + \dot{\theta}\frac{\partial W_c}{\partial\dot{\theta}} = 2W_c\left(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta}\right)$$

INFORMAŢIA DE LA PAGINA 125

$$\frac{\partial W_c}{\partial\dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} C_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} C_{ik}\dot{q}_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p} C_{kj}\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{p} C_{ik}\dot{q}_i$$

$$\sum_{k-1}^{p}\dot{q}_k\frac{\partial W_c}{\partial\dot{q}_k} = \sum_{k-1}^{p}\dot{q}_k\sum_{i=1}^{p} C_{ik}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} C_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = 2W_c$$

astfel încât obținem în final :

$$\frac{dW_c(\varphi,\theta,\dot{\varphi},\dot{\theta})}{dt} = -\dot{\varphi}\left[\frac{\partial W_c}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}}\right)\right] - \dot{\theta}\left[\frac{\partial W_c}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial \dot{\theta}}\right)\right]$$

Revenind la legea conservării energiei mecanice şi înlocuind derivatele energiei cinetice şi energiei potențiale, obținem :

$$-\dot{\varphi}\left[\frac{\partial W_c}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}}\right)\right] - \dot{\theta}\left[\frac{\partial W_c}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial \dot{\theta}}\right)\right] + \dot{\varphi}\frac{\partial W_p}{\partial \varphi} + \dot{\theta}\frac{\partial W_p}{\partial \theta} = 0$$

Grupând după vitezele generalizate, obținem :

$$\dot{\varphi}\left[-\frac{\partial W_c}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_p}{\partial \varphi} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}}\right)\right] + \dot{\theta}\left[-\frac{\partial W_c}{\partial \theta} + \frac{\partial W_p}{\partial \theta} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial \dot{\theta}}\right)\right] = 0$$

Vitezele generalizate sunt variabile independente. De aceea egalitatea de mai sus poate fi valabilă oricare ar fi valorile vitezelor generalizate doar dacă coeficienții lor sunt nuli :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial(W_c - W_p)}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_c}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial(W_c - W_p)}{\partial \theta} = 0$$

Dacă ținem cont că energia potențială nu depinde de vitezele generalizate, ceea ce are drept consecință şi relațiile :

$$\frac{\partial W_p(\varphi,\theta)}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial W_p(\varphi,\theta)}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

rezultă că relațiile anterioare pot fi scrise sub o formă mai simetrică :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(W_c - W_p)}{\partial \dot{\varphi}}\right] - \frac{\partial(W_c - W_p)}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(W_c - W_p)}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial(W_c - W_p)}{\partial \theta} = 0$$

COMENTARIUL DE LA PAGINA 126

Observați că **toate calculele făcute la paginile 125 şi 126 sunt generale** şi nu depind de problema pe care o discutăm. De aceea, demonstrația pe care o urmărim este valabilă pentru orice sistem de puncte materiale izolat de exterior şi între care nu se exercită forțe neconservative, indiferent de numărul de grade de libertate al sistemului.

Diferența între energia cinetică totală şi energia potențială totală ale unui sistem de puncte materiale se numeşte **funcția lui Lagrange** sau, pe scurt, **lagrangean** şi se notează cu $\mathcal{L}$.

Lagrangeanul este o funcție care depinde de coordonatele şi vitezele generalizate :

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(q_1, q_2, \ldots q_p, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_p\right)}$$

O ecuație de forma :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad ; \quad i = 1,2,\ldots p}$$

se numeşte **ecuația lui Lagrange pentru forțe conservative**.

În problema pe care o rezolvăm, lagrangeanul are forma particulară :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_0^2\right)\dot{\varphi}^2 + m_2 l_2^2 \dot{\theta}^2 + 2 m_2 l_0 l_2 \dot{\varphi}\dot{\theta} \sin(\theta - \varphi)\right] - \left(m_2 l_0 - m_1 l_1\right) g \sin\varphi + m_2 g l_2 \cos\theta$$

Prima dintre ecuațiile lui Lagrange este :

$$\frac{d}{dt}\left[\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_0^2\right)\dot{\varphi} + m_2 l_0 l_2 \dot{\theta} \sin(\theta - \varphi)\right] + m_2 l_0 l_2 \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos(\theta - \varphi) + \left(m_2 l_0 - m_1 l_1\right) g \cos\varphi = 0$$

sau

$$\boxed{\left(m_1 l_1^2 + m_2 l_0^2\right)\ddot{\varphi} + m_2 l_0 l_2 \ddot{\theta} \sin(\theta - \varphi) + m_2 l_0 l_2 \dot{\theta}^2 \cos(\theta - \varphi) + \left(m_2 l_0 - m_1 l_1\right) g \cos\varphi = 0}$$

A doua ecuație Lagrange este :

$$\frac{d}{dt}\left[m_2 l_2^2 \dot{\theta} + m_2 l_0 l_2 \dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi)\right] - m_2 l_0 l_2 \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos(\theta - \varphi) + m_2 g l_2 \sin\theta = 0$$

sau

$$\boxed{m_2 l_2^2 \ddot{\theta} + m_2 l_0 l_2 \ddot{\varphi} \sin(\theta - \varphi) - m_2 l_0 l_2 \dot{\varphi}^2 \cos(\theta - \varphi) + m_2 g l_2 \sin\theta = 0}$$

PROBLEMA DE LA PAGINA 127

Arătați că dacă masa bananei este neglijabilă în comparație cu masa maimuței, iar tija şi sfoara stau inițial în poziție verticală, sistemul este în echilibru.

În acest moment am obținut două **ecuații diferențiale de ordinul doi**. În matematică, se arată că **ecuațiile de acest tip au întotdeauna soluție şi că soluția este unică dacă se cunosc valorile inițiale ale coordonatelor şi vitezelor generalizate** :

$$\varphi = \varphi\left(t;\varphi_0,\theta_0,\dot{\varphi}_0,\dot{\theta}_0\right)$$
$$\theta = \theta\left(t;\varphi_0,\theta_0,\dot{\varphi}_0,\dot{\theta}_0\right)$$

Cunoscând forma explicită a funcțiilor $\varphi = \varphi\left(t;\varphi_0,\theta_0,\dot{\varphi}_0,\dot{\theta}_0\right)$ şi $\theta = \theta\left(t;\varphi_0,\theta_0,\dot{\varphi}_0,\dot{\theta}_0\right)$ se pot calcula componentele accelerațiilor fiecărui punct material (vezi relațiile de la pagina 122). Aplicând principiul fundamental al dinamicii în cazul fiecărui punct material al sistemului se pot calcula mărimile componentelor forțelor de legătură. În acest fel problema de mecanică este complet rezolvată.

De exemplu, forțele de legătură care acționează asupra punctelor **M** şi **B** sunt :

$$N_{1,x} = m_1 l_1\left(\ddot{\varphi}\,sin\,\varphi + \dot{\varphi}^2\,cos\,\varphi\right)$$
$$N_{1,y} = m_1 g + m_1 l_1\left(-\ddot{\varphi}\,cos\,\varphi + \dot{\varphi}^2\,sin\,\varphi\right)$$
$$N_{1,z} = 0$$

$$N_{2,x} = m_2 l_2\left(\ddot{\theta}\,cos\,\theta - \dot{\theta}^2\,sin\,\theta\right) - m_2 l_0\left(\ddot{\varphi}\,sin\,\varphi + \dot{\varphi}^2\,cos\,\varphi\right)$$
$$N_{2,y} = m_2 g + m_2 l_2\left(\ddot{\theta}\,sin\,\theta + \dot{\theta}^2\,cos\,\theta\right) + m_2 l_0\left(\ddot{\varphi}\,cos\,\varphi - \dot{\varphi}^2\,sin\,\varphi\right)$$
$$N_{2,z} = 0$$

CELE PREZENTATE ÎN A DOUA JUMĂTATE A ACESTEI LECȚII POT FI CONSIDERATE CA **NOȚIUNI ELEMENTARE DE MECANICĂ ANALITICĂ**. TREBUIE SĂ REȚINEȚI CĂ **FOLOSIREA LAGRANGEANULUI ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE MECANICĂ ESTE POSIBILĂ DOAR PENTRU SISTEME ÎN CARE NU SE EXERCITĂ FORȚE NECONSERVATIVE** !

COMENTARIUL DE LA PAGINA 128

Chiar dacă se afirmă că ecuațiile diferențiale de ordinul al doilea admit întotdeauna soluție şi aceasta este unică, nu înseamnă şi că forma analitică (expresia matematică) a soluției poate fi găsită în toate cazurile.

ÎN REZUMAT

Pentru a rezolva o problemă de mecanică care implică un sistem de puncte materiale izolat de exterior şi între care nu se exercită forțe disipative (neconservative) puteți să procedați după cum urmează :

❖ Idealizați situația dată până la limita în care nu afectați esența problemei

❖ Stabiliți şi notați coordonatele punctelor importante, utilizând un sistem de axe de coordonate avantajos

❖ Scrieți ecuațiile matematice care exprimă legăturile din sistem

❖ Determinați numărul de grade de libertate p şi alegeți cei mai potriviți parametri drept coordonate generalizate : $q_1,\ldots q_p$

❖ Exprimați fiecare coordonată în funcție de coordonatele generalizate

❖ Calculați componentele vitezelor în funcție de coordonatele generalizate, evidențiind astfel vitezele generalizate

❖ Calculați energiile cinetică W_c şi potențială W_p totale

❖ Calculați funcția lui Lagrange (lagrangeanul) : $\mathcal{L} = W_c - W_p$

❖ Înlocuiți lagrangeanul în ecuațiile lui Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad ; \quad i = 1,2,\ldots p$$

❖ Rezolvați sistemul de ecuații diferențiale rezultat şi stabiliți valorile constantelor de integrare utilizând valorile inițiale ale coordonatelor şi vitezelor inițiale : $q_j = q_j\left(t; q_{1,0},\ldots q_{p,0}, \dot{q}_{1,0},\ldots \dot{q}_{p,0}\right)$

❖ Dacă este necesar folosiți principiul fundamental al dinamicii pentru a calcula valoarea forțelor de legătură, precum şi orientarea acestora

❖ Sfârşit

BIOGRAFIA DE LA PAGINA 129

Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), pe numele său adevărat Giuseppe Luigi Lagrangia, a fost un mare matematician italo-francez. A adus contribuții majore la teoria numerelor şi mecanica analitică şi celestă. Cea mai importantă carte a sa este „*Mecanica analitică*”, apărută în 1788. A fost înobilat de către împăratul Napoleon I, primind titlul de conte.

2.8. ÎNCHEIERE

Am ajuns la sfârşitul unui capitol extrem de important pentru formarea dumneavoastră. Acest capitol cuprinde, pe scurt, informaţie fundamentală despre mecanica clasică – acea mecanică pe care ar trebui s-o cunoască toţi absolvenţii învăţământului superior al ştiinţelor exacte sau tehnice.

Mecanica clasică sau newtoniană a avut perioada ei de glorie, fiind, la vremea respectivă, o „regină a ştiinţelor”. Acest rol l-a putut îndeplini numai umăr la umăr cu matematica, la dezvoltarea căreia a contribuit de multe ori.

Vremurile au trecut, iar buna mecanică clasică (repet, indispensabilă pentru aproape orice inginer) a început să-şi piardă din strălucire. Ca exemplu, excepţionalele ceasuri elveţiene clasice, mărturii de perfecţiune a mecanicii fine, au fost înlocuite încet – încet de ceasurile electronice, mai ieftine şi performante.

Ce se mai scrie astăzi despre mecanică într-o enciclopedie de prestigiu ? Iată un fragment :

> **MECANICA – ştiinţa acţiunii forţelor asupra corpurilor materiale. Ea formează miezul tuturor ştiinţelor exacte şi tehnice. Într-adevăr, prin formularea de către Isaac Newton – în secolul al XVII-lea – a legilor mecanicii s-a iniţiat dezvoltarea ştiinţei moderne. Teoria lui Newton *nu descrie în mod corect* comportamentul particulelor la scala atomică, sau pe acela al sistemelor care se deplasează cu viteze apropiate de aceea a luminii sau în câmpuri gravitaţionale intense. În aceste cazuri, sunt necesare abordări teoretice moderne, cum ar fi mecanica cuantică sau mecanica relativistă**. (Brittanica – 2002)

Noile ramuri ale mecanicii au fost dezvoltate în secolul al XX-lea de către unele dintre cele mai strălucite nume din istoria fizicii : Niels Bohr, Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Max Born, Albert Einstein. Ceea ce este caracteristic acestor noi concepte ştiinţifice este că există o limită de la care predicţiile lor încep să coincidă cu acelea ale mecanicii clasice – mecanica care descrie aproape perfect condiţiile ce ne sunt familiare în viaţa de zi cu zi.

SPERANŢA DE LA PAGINA 130

Regele a murit, trăiască regele !

3. OSCILAȚII MECANICE

3.1. INTRODUCERE

Una dintre primele noastre experiențe în materie de oscilații (pe lângă legănatul în brațele mamei) a fost datul în leagăn.

Desigur, putem sta pur şi simplu în scaunul leagănului. În termeni ştiinţifici, spunem în acest caz că suntem un sistem mecanic aflat în stare de echilibru stabil. Pentru ca legănatul să înceapă este nevoie ca o altă persoană să împingă scaunul şi să-i imprime o viteză inițială sau să-l ridice la o anumită înălțime. Cu alte cuvinte, pentru ca oscilația să înceapă este nevoie mai întâi ca starea de echilibru stabil să fie perturbată printr-o intervenție din exterior, sistemul ajungând într-o stare de neechilibru. Lăsat liber, leagănul se va deplasa în mod repetat între două poziții extreme, aflate de o parte şi de alta a poziției de echilibru. Poziția, viteza, impulsul, energia cinetică, energia potențială constituie un grup de parametri ce caracterizează starea sistemului fizic care este leagănul. În

VERSUL DE LA PAGINA 131

Şi dacă ramuri bat în geam şi se cutremur plopii …

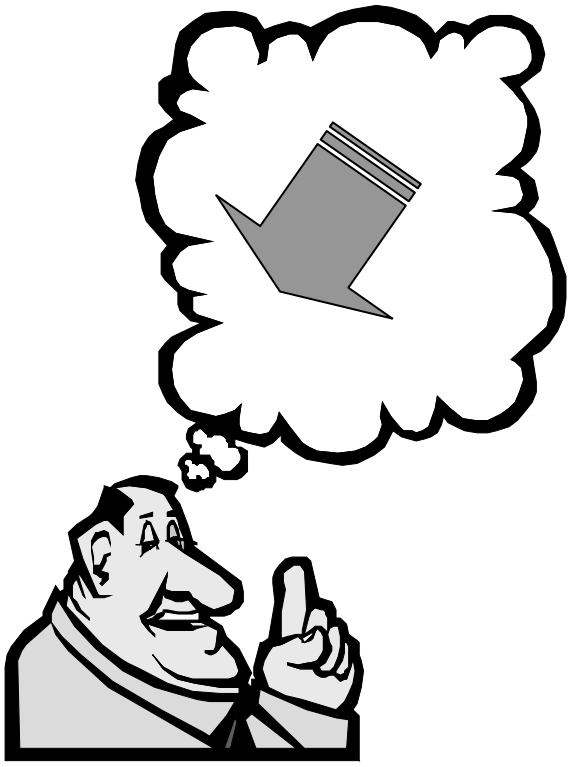
Mihai Eminescu (1850 – 1889)

cursul mişcării, aceşti parametri îşi modifică continuu valorile, dar rămân în intervale care au ca puncte de referință valorile lor la trecerea prin starea de echilibru. Concluzia acestei discuții este următoarea :

✍ Există situații în care parametrii care descriu un sistem mecanic iau succesiv şi repetat valori care se află în intervale care au ca puncte de referință valorile corespunzătoare stării de echilibru. Spunem în acest caz că sistemul efectuează **oscilații mecanice**.

Stările prin care trece oscilatorul se pot sau nu repeta identic în timp.

✍ În cazul în care parametrii ce caracterizează sistemul mecanic iau valori egale după intervale de timp egale, oscilația se numeşte **oscilație periodică**, iar intervalul de timp caracteristic acesteia se numeşte **perioada oscilației** şi se notează cu T.

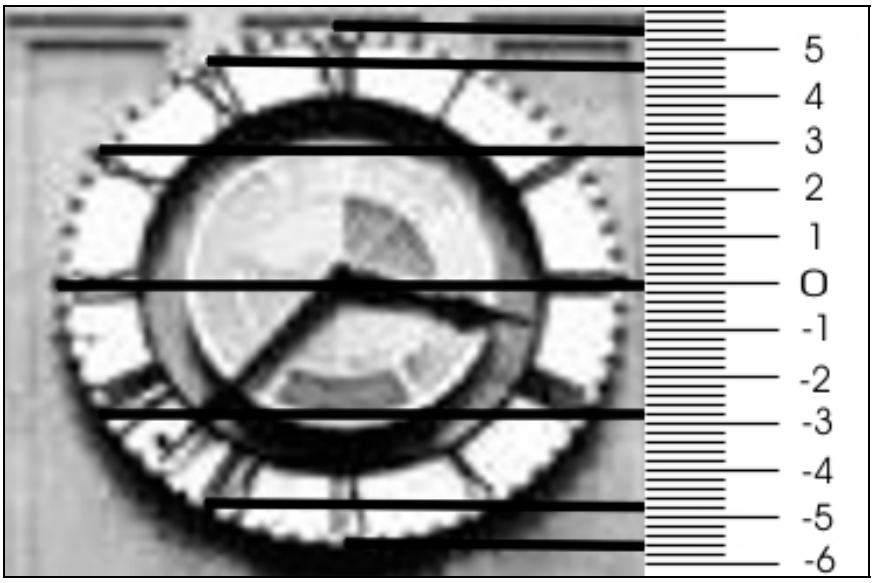


De multe ori, dificultatea principală pentru cineva care studiază fizica este aceea de a transforma în relații matematice ideile exprimate în cuvinte. Cum putem pune sub formă matematică propoziția : „*În cazul unei oscilații periodice parametrii sistemului variază continuu şi iau valori egale după intervale de timp egale*” ? Matematic, procedăm astfel : notăm parametrul respectiv într-un anume mod şi evidențiem că este o funcție de timp. Scriem, de exemplu, $x(t)$. Repetarea unei valori la trecerea unui interval de timp egal cu perioada se poate traduce în limbaj matematic astfel : $x_1(t_1) = x_1(t_1 + T)$. **Nu este însă suficient**, pentru că tot şirul de valori trebuie să se repete identic şi nu numai o anumită valoare! De aceea, condiția trebuie să fie îndeplinită pentru oricare valoare a parametrului şi oricare moment de timp :

$$x(t) = x(t+T) \quad \forall t$$

COMENTARIUL DE LA PAGINA 132

Oscilațiile nu sunt caracteristice doar fenomenelor mecanice. La rândul ei, acțiunea exterioară care declanşează o oscilație nu trebuie în mod necesar să fie de origine mecanică. De exemplu, variațiile periodice ale intensității curentului electric dintr-o antenă de recepție sunt provocate de acțiunea câmpului electromagnetic.



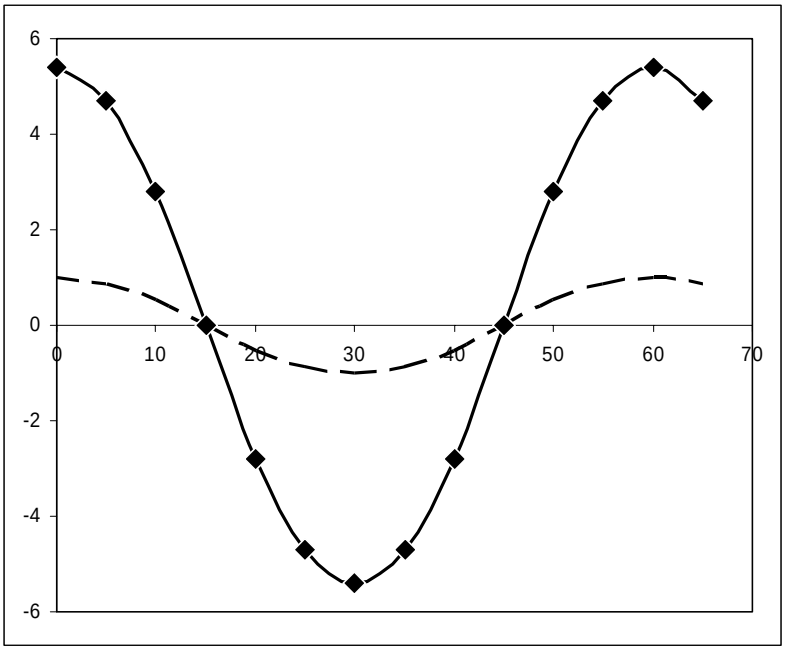
Fenomenele periodice ne sunt familiare din viața de toate zilele. Alternanța zilei cu noaptea, alternanța anotimpurilor sunt exemple de fenomene periodice. Odată cu evoluția istorică, oamenii au simțit nevoia să măsoare cât mai precis scurgerea timpului şi aşa au inventat ceasurile. Oricare dintre limbile unui ceas efectuează o rotație uniformă, de perioadă bine determinată. Deşi această mişcare este periodică, ea nu este în acelaşi timp şi oscilatorie, pentru că sensul ei nu se schimbă în timp. Să presupunem acum că urmărim evoluția în timp a proiecției pe o axă a vârfului minutarului orologiului din figură. De exemplu, axa verticală. Observăm că la ora 3 fix poziția vârfului minutarului era de 5,4 unități. Pe măsura trecerii timpului, această valoare scade, atingând un minim de -5,4 unități, după care creşte din nou până la valoarea inițială. Acest ciclu se repetă la fiecare oră. Deşi minutarul nu are o mişcare oscilatorie, proiecția vârfului său pe o axă este o mişcare oscilatorie, pentru că la fiecare jumătate de oră sensul său se inversează. Putem alcătui un tabel care să cuprindă valorile timpului şi poziției vârfului minutarului :

t(min)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
x(div)	5,4	4,7	2,8	0	-2,8	-4,7	-5,4	-4,7	-2,8	0	2,8	4,7	5,4

Graficul poziției vârfului minutarului în funcție de timp ne va permite să intuim mai uşor ecuația de mişcare $x = x(t)$.

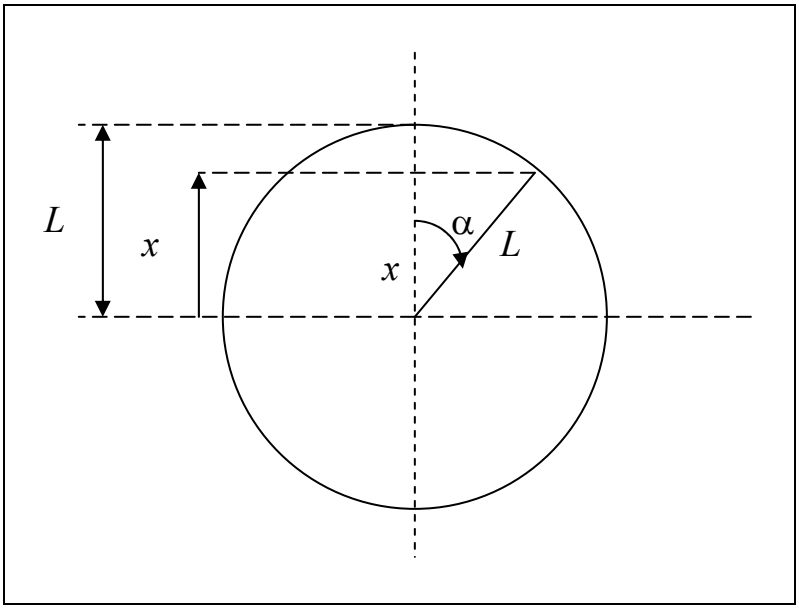
ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 133

Cum s-ar fi modificat tabelul de mai sus dacă am fi luat în considerare rotația orarului şi nu pe cea a minutarului ? Dar dacă ne refeream la secundar ?



Forma graficului este familiară şi ne aminteşte de o cosinusoidă (curba desenată cu linie întreruptă). Să arătăm acum şi pe cale matematică că nu ne înşelăm. Luând axa verticală care trece prin originea minutarului ca axă de referinţă, notând lungimea minutarului cu L, alegând ca sens al rotaţiei sensul antitrigonometric, notând cu ω viteza unghiulară de rotaţie a minutarului şi utilizând legea mişcării de rotaţie uniformă, putem scrie mai întâi expresia unghiului pe care-l face minutarul cu axa de referinţă în funcţie de timp :

$$\alpha = \omega t$$



Proiecţia x a minutarului pe axa verticală este :

$$x = L\cos\omega t$$

Acesta este şi rezultatul pe care-l aşteptam ! Un asemenea tip de oscilaţie se numeşte **oscilaţie liniară armonică**, pentru că legea de mişcare depinde de o funcţie armonică. Perioada acestei mişcări oscilatorii poate fi calculată, conform celor discutate anterior, cu condiţia :

$$x(t) = x(t+T) \quad \forall t$$

Rezultă :

$$L\cos\omega t = L\cos[\omega(t+T)] \quad \Rightarrow \quad \cos\omega t = \cos\omega t\cos\omega T - \sin\omega t\sin\omega T$$

sau :

$$(1-\cos\omega T)\cos\omega t + \sin\omega T\sin\omega t = 0$$

PROBLEMA DE LA PAGINA 134

În cele discutate pe această pagină am considerat ca axă de referinţă pentru măsurarea unghiului α axa verticală, a cărei origine coincide cu originea minutarului. Determinaţi ecuaţia de mişcare $x(t)$ în raport cu o axă oarecare.

$$2\sin^2\frac{\omega T}{2}\cos\omega t + 2\sin\frac{\omega T}{2}\cos\frac{\omega T}{2}\sin\omega t = 0$$

$$\sin\frac{\omega T}{2}\left(\sin\frac{\omega T}{2}\cos\omega t + \cos\frac{\omega T}{2}\sin\omega t\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\frac{\omega T}{2}\sin\left(\omega t + \frac{\omega T}{2}\right) = 0$$

Cum această relație trebuie să fie valabilă oricare ar fi momentul de timp t, iar $\sin\left(\omega t + \frac{\omega T}{2}\right)$ nu poate fi nul la orice moment de timp, rezultă :

$$\sin\frac{\omega T}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega T}{2} = k\pi\,;\, k \in \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad T = k\frac{2\pi}{\omega}$$

Rezultatul pare oarecum curios pentru că soluția nu este unică, valoarea lui k fiind nedeterminată. De aceea va trebui să definim mai precis ce înseamnă perioada unei oscilații :

✍ Perioada este **cel mai scurt interval de timp** după care parametrii care caracterizează oscilatorul îşi repetă valorile.

Conform acestei definiții, valoarea lui k trebuie să fie cea mai mică posibil, adică 1. Rezultă :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Expresia perioadei oscilatorului armonic

Oscilația armonică este unul dintre cele mai simple tipuri de oscilație. Cu toate acestea, ea poate fi întâlnită în numeroase situații fizice, având, prin urmare o deosebită importanță.

În sinteză, putem să definim următoarele noțiuni :

✍ Mişcările oscilatorii de tipul $x = A\sin(\omega t + \varphi)$ sau $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ se numesc oscilații armonice. Parametrii care intervin în expresie au următoarele semnificații : x – **elongația oscilației**, A – **amplitudinea oscilației**, ω - **pulsația oscilației**, φ - **faza inițială a oscilației**, $\Phi = \omega t + \varphi$ - **faza oscilației**, t – **momentul de timp**. Relația de legătură între perioadă şi pulsație este : $\omega T = 2\pi$. Frecvența oscilației este inversul perioadei : $\nu = 1/T$.

PROBLEMA DE LA PAGINA 135

Considerând că x este coordonata punctului în care se găseşte un punct material ce efectuează o oscilație armonică, calculați viteza şi accelerația corpului (adică prima, respectiv a doua derivată a lui x în raport cu t). Arătați că $a = -\omega^2 x$.

3.2. TIPURI DE MIŞCĂRI OSCILATORII

3.2.1.O PROBLEMĂ DE MATEMATICĂ

Vom discuta în acest subcapitol o problemă de matematică. Cititorii care au cunoştinţe despre rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de ordinul al doilea pot trece direct la următorul subcapitol.

Ecuaţia diferenţială de ordinul al doilea pe care o avem în vedere este următoarea :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

sau :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Vom proceda la rezolvare într-un mod oarecum diferit de cel standard, pentru a face înţelegerea mai uşoară pentru aceia care nu au urmat un curs de matematică adecvat. Mai întâi facem următoarea schimbare de funcţie :

$$x(t) = e^{\alpha t} X(t)$$

Conform acestei schimbări de funcţie, obţinem :

$$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t} X + e^{\alpha t}\dot{X}$$

şi :

$$\ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t} X + 2\alpha e^{\alpha t}\dot{X} + e^{\alpha t}\ddot{X}$$

Înlocuind în ecuaţia diferenţială, obţinem :

$$\alpha^2 e^{\alpha t} X + 2\alpha e^{\alpha t}\dot{X} + e^{\alpha t}\ddot{X} + 2\gamma\alpha e^{\alpha t} X + 2\gamma e^{\alpha t}\dot{X} + \omega_0^2 e^{\alpha t} X = 0$$

sau :

$$e^{\alpha t}\left[\ddot{X} + 2(\alpha+\gamma)\dot{X} + \left(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2\right)X\right] = 0$$

Cum $e^{\alpha t}$ nu poate fi un termen nul, rezultă :

$$\ddot{X} + 2(\alpha+\gamma)\dot{X} + \left(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2\right)X = 0$$

Alegând $\alpha = -\gamma$, rezultă :

$$x = e^{-\gamma t} X$$

şi

CUGETAREA DE LA PAGINA 136

Toate legile matematice pe care le găsim în Natură mi se par întotdeauna suspecte, în ciuda frumuseţii lor. Ele nu-mi oferă plăcerea. Ele sunt doar nişte auxiliare. Privind mai de aproape nu totul este adevărat.

Georg Christoph Lichtenberg (1742–1799), fizician şi scriitor german

$$\ddot{X} + \left(-\gamma^2 + \omega_0^2\right)X = 0$$

sau :

$$\ddot{X} = -\left(-\gamma^2 + \omega_0^2\right)X$$

Putem distinge trei situații :

Cazul A) $\boxed{-\left(-\gamma^2 + \omega_0^2\right) = \gamma^2 - \omega_0^2 = \Omega^2 \geq 0}$

În acest caz :

$$\ddot{X} = \Omega^2 X$$

Mai putem scrie :

$$\ddot{X}\dot{X} = \Omega^2 \dot{X}X \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d\dot{X}^2}{dt} = \frac{\Omega^2}{2}\frac{dX^2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{X}^2 = \Omega^2 X^2 + C$$

unde C este o constantă de integrare. Ecuația se poate pune sub forma :

$$\frac{dX}{\sqrt{\Omega^2 X^2 + C}} = dt \quad \Rightarrow \quad \frac{d\left(\frac{\Omega X}{\sqrt{C}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\Omega X}{\sqrt{C}}\right)^2 + 1}} = \Omega dt$$

Cu schimbarea de funcție ($sh\,u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$; $ch\,u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$; $ch^2 u - sh^2 u = 1$) :

$$\frac{\Omega X}{\sqrt{C}} = sh\,u \quad \Rightarrow \quad dX = \frac{\sqrt{C}}{\Omega} ch\,u\,du$$

obținem :

$$\frac{ch\,u\,du}{\sqrt{sh^2 u + 1}} = \Omega dt \quad \Rightarrow \quad du = \Omega dt \quad \Rightarrow \quad u = \Omega t + \varphi$$

unde φ este o constantă de integrare. Rezultă :

$$X = \frac{\sqrt{C}}{\Omega} sh(\Omega t + \varphi) \quad sau \quad X = A\,sh(\Omega t + \varphi)$$

În final, soluția ecuației diferențiale în cazul **A**) este :

$$\boxed{x = e^{-\gamma t} X = A e^{-\gamma t} sh(\Omega t + \varphi) = A e^{-\gamma t}\, sh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t + \varphi\right) \quad ; \quad \gamma > \omega_0}$$

Cazul B) $\boxed{-\gamma^2 + \omega_0^2 = 0}$

CUGETAREA DE LA PAGINA 137

Orice ştiinţă are nevoie de matematică.

Roger Bacon (1220?–1292), călugăr, filosof şi om de ştiinţă englez

În acest caz :

$$\ddot{X} = 0$$

Prin integrare, rezultă :

$$\dot{X} = A \quad \Rightarrow \quad X = At + B$$

unde A şi B sunt două constante de integrare. Soluția completă este :

$$\boxed{x = (At + B)e^{-\gamma t} \quad ; \quad \omega_0 = \gamma}$$

Cazul C) $\boxed{-\gamma^2 + \omega_0^2 = \omega^2 > 0}$

În acest caz :

$$\ddot{X} = -\omega^2 X$$

Amplificând cu prima derivată a lui X obținem :

$$2\ddot{X}\dot{X} = -2\omega^2 \dot{X}X \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(\dot{X}^2)}{dt} = -\omega^2 \frac{d(X^2)}{dt}$$

Prin integrare rezultă :

$$\dot{X}^2 = -\omega^2 X^2 + C$$

unde C este o constantă de integrare. Expresia se poate pune sub forma :

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{C - \omega^2 X^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega \frac{dX}{\sqrt{C}}}{\sqrt{1 - \left(\omega \frac{X}{\sqrt{C}}\right)^2}} = \omega dt$$

Cu substituția $\omega \frac{X}{\sqrt{C}} = sin\, u$, obținem :

$$\frac{cos\, u\, du}{\sqrt{1 - sin^2 u}} = \omega dt \quad \Rightarrow \quad du = \omega dt \quad \Rightarrow \quad u = \omega t + \varphi$$

unde φ este o constantă de integrare. Mai rezultă :

$$X = \frac{\sqrt{C}}{\omega} sin(\omega t + \varphi) \quad sau \quad X = A\, sin(\omega t + \varphi)$$

În final, soluția ecuației diferențiale în cazul **A**) este :

$$\boxed{x = Ae^{-\gamma t} sin(\omega t + \varphi) = Ae^{-\gamma t} sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t + \varphi\right) \quad ; \quad \omega_0 > \gamma}$$

CUGETAREA DE LA PAGINA 138

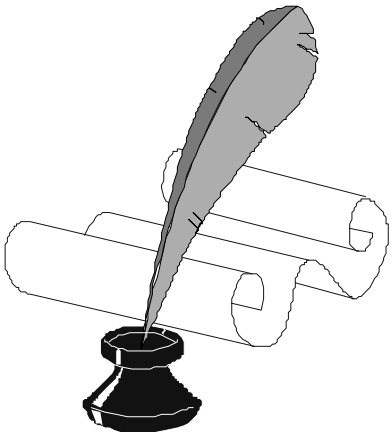
În măsura în care legile matematicii se referă la realitate, ele nu sunt sigure, iar în măsura în care sunt sigure, ele nu se referă la realitate.

Albert Einstein (1879–1955)

NOTĂ SPECIALĂ

Dacă $\gamma = 0$, ecuația $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ are un singur tip de soluție, şi anume $x = A\,sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Constantele de integrare A şi φ pot fi determinate cunoscând condițiile inițiale $x(0) = x_0$; $\dot{x}(0) = v_0$.



De exemplu, în cazul $\gamma = 0$, în care soluția este $x = A\,sin(\omega_0 t + \varphi)$ (ceea ce corespunde mişcării oscilatorii armonice), putem calcula mai întâi prima derivată a funcției x :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A\,cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Trebuie respectate condițiile inițiale :

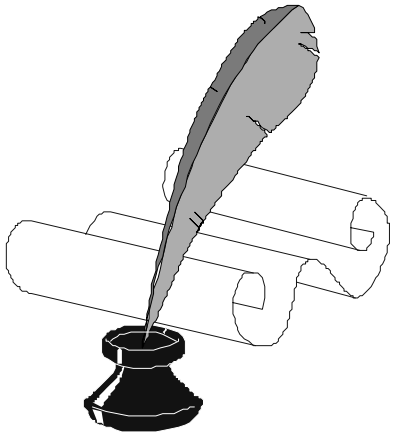
$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\,sin\,\varphi = x_0 \\ \omega_0 A\,cos\,\varphi = v_0 \end{cases}$$

Se formează un sistem de două ecuații cu două necunoscute : A şi φ. Soluțiile acestui sistem sunt :

$$tg\,\varphi = \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \quad ; \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

În final soluția, ecuației $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ este :

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}\,sin\left[\omega_0 t + arctg\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)\right]$$



Ecuația discutată până acum este o ecuație omogenă, adică membrul ei drept este o constantă care nu depinde de timp (în cazul nostru 0). Este posibil însă ca fenomenul fizic pe care-l modelăm matematic în acest mod să fie mai complicat şi să impună ca membrul drept al ecuației să fie şi el o funcție de timp :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = g(t)$$

CUGETAREA DE LA PAGINA 139

Ecuațiile sunt mai importante pentru mine, pentru că politica este pentru prezent, dar o ecuație este ceva pentru eternitate.

Albert Einstein (1879–1955)

O astfel de ecuație se numeşte **ecuație diferențială de ordinul al doilea neomogenă**.

✍ În matematică, se arată că soluția generală a unei ecuații diferențiale neomogene este dată de suma între soluția generală a ecuației omogene şi o soluție particulară a ecuației neomogene.

O astfel de ecuație diferențială care prezintă interes în fizică este următoarea :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \Phi \sin \omega_e t$$

Se remarcă că funcția de timp din membrul drept este o funcție armonică.

Soluția generală a ecuației diferențiale omogene fiind deja cunoscută, vom încerca în continuare să găsim soluția particulară a ecuației neomogene.

❖ Începem prin a considera funcția :

$$x = B \sin(\omega_e t + \phi) = B \sin \omega_e t \cos \phi + B \cos \omega_e t \sin \phi$$

❖ Calculăm derivatele sale :

$$\dot{x} = \omega_e B \cos \omega_e t \cos \phi - \omega_e B \sin \omega_e t \sin \phi$$

$$\ddot{x} = -\omega_e^2 B \sin \omega_e t \cos \phi - \omega_e^2 B \cos \omega_e t \sin \phi$$

❖ Introducem aceste expresii în ecuația diferențială neomogenă şi obținem :

$$\left(-\omega_e^2 B \cos \phi - 2\gamma\omega_e B \sin \phi + \omega_0^2 B \cos \phi - \Phi\right) \sin \omega_e t +$$
$$+ \left(-\omega_e^2 B \sin \phi + 2\gamma\omega_e B \cos \phi + \omega_0^2 B \sin \phi\right) \cos \omega_e t = 0$$

❖ Funcțiile $\sin \omega_e t$ şi $\cos \omega_e t$ sunt independente, ceea ce înseamnă că egalitatea anterioară poate fi respectată la orice moment de timp doar dacă coeficienții acestor funcții sunt nuli :

$$\begin{cases} \left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right) B \cos \phi - 2\gamma\omega_e B \sin \phi - \Phi = 0 \\ \left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right) B \sin \phi + 2\gamma\omega_e B \cos \phi = 0 \end{cases}$$

❖ Soluțiile acestui sistem de ecuații sunt :

CUGETAREA DE LA PAGINA 140

În matematică nu înțelegi lucrurile. Ajungi doar să te obişnuieşti cu ele.

John Von Neumann (1903–1957), matematician american de origine maghiară

$$\boxed{tg\,\phi = -\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_0^2-\omega_e^2}}$$

şi

$$B=\frac{\Phi}{\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)cos\,\phi-2\gamma\omega_e\,sin\,\phi}=\frac{\Phi}{2\gamma\omega_e\,cos\,\phi\left(\frac{\omega_0^2-\omega_e^2}{2\gamma\omega_e}-tg\,\phi\right)}=\frac{\Phi\sqrt{1+tg^2\,\phi}}{-2\gamma\omega_e\left(\frac{1}{tg\,\phi}+tg\,\phi\right)}$$

sau :

$$B=\frac{\Phi\,tg\,\phi}{-2\gamma\omega_e\sqrt{1+tg^2\,\phi}}=\frac{\Phi\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_0^2-\omega_e^2}}{2\gamma\omega_e\sqrt{1+\frac{4\gamma^2\omega_e^2}{\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2}}}$$

sau :

$$\boxed{B=\frac{\Phi}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2+4\gamma^2\omega_e^2}}}$$

- Soluția particulară pe care o căutam este :

$$x=\frac{\Phi}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2+4\gamma^2\omega_e^2}}\,sin\left[\omega_e t-arctg\left(\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_0^2-\omega_e^2}\right)\right]$$

- **Soluția generală a ecuației diferențiale neomogene** este :

Cazul A)

$$\boxed{x=Ae^{-\gamma t}sh\left(\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t+\varphi\right)+\frac{\Phi}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2+4\gamma^2\omega_e^2}}\,sin\left[\omega_e t-arctg\left(\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_0^2-\omega_e^2}\right)\right]}$$

Cazul C)

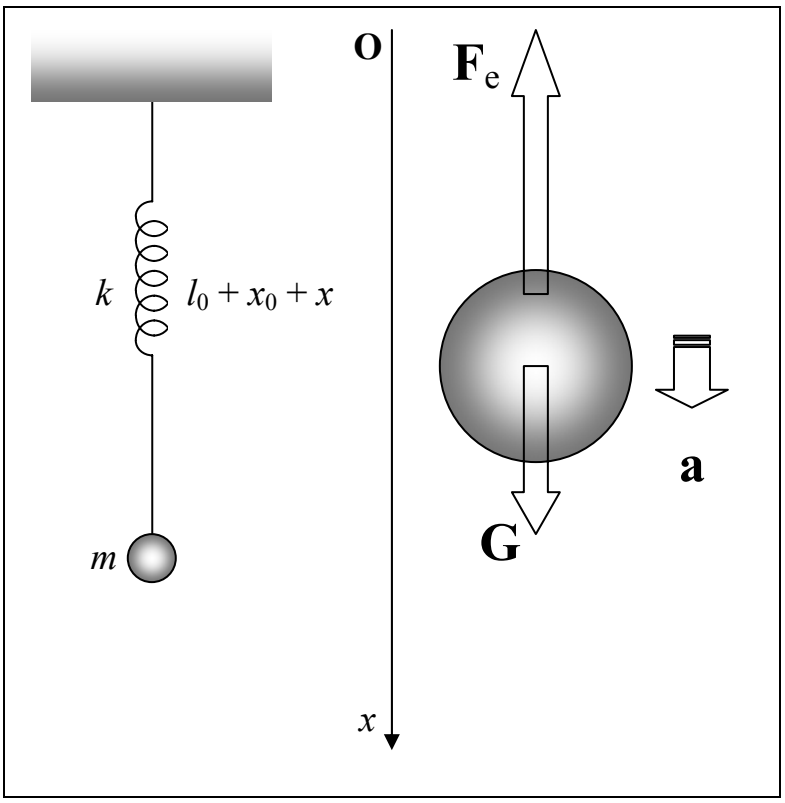
$$\boxed{x=Ae^{-\gamma t}\,sin\left(\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,t+\varphi\right)+\frac{\Phi}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2+4\gamma^2\omega_e^2}}\,sin\left[\omega_e t-arctg\left(\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_0^2-\omega_e^2}\right)\right]}$$

CUGETAREA DE LA PAGINA 141

Nu lăsați pe cei ce nu cunosc matematică să intre aici.

Platon (428? îC–347? îC), filosof grec.
Inscripție gravată la intrarea în Academie

3.2.2.OSCILATORUL ARMONIC



Începe aici „istoria” unui „cobai” pe care-l vom examina în mai multe ipostaze experimentale. „Cobaiul” este un sistem fizic simplu format dintr-un resort elastic, de constantă de elasticitate k, aflat în poziție verticală şi suspendat la capătul superior, şi un mic corp de masă m, ataşat la capătul inferior. Ipostaza pe care o discutăm în subcapitolul de față este cea mai simplă : „cobaiul” este aşezat într-o incintă vidată, plasată în câmpul gravitațional de la suprafața Pământului. Prin urmare, rezultă că singurele forțe care acționează asupra corpului m sunt : greutatea şi forța elastică.

Conform principiilor mecanicii clasice, rezultanta acestor forțe determină accelerația corpului :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_e$$

Proiectând această relație pe axa Ox reprezentată în figura de mai sus, obținem :

$$ma = mg - F_e$$

sau :

$$a = g - \frac{F_e}{m}$$

Poziția de echilibru, corespunzătoare unei valori nule a accelerației a, este atinsă când elongația resortului este $l - l_0 = x_0$. Rezultă :

$$0 = g - \frac{F_{e0}}{m} = g - \frac{kx_0}{m} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}$$

Într-o poziție de neechilibru oarecare ($l - l_0 = x + x_0$), accelerația este :

PROBLEMA DE LA PAGINA 142

Cum s-ar modifica expresia elongației la echilibru x_0 dacă incinta vidată s-ar deplasa orizontal cu accelerația **w** ?

$$ma = mg - F_e = mg - k(x + x_0) = mg - kx - kx_0 = mg - kx - k\frac{mg}{k}$$

sau :

$$\boxed{ma = -kx}$$

Împărțind relația prin masa m şi notând :

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

se obține :

$$\boxed{a = -\omega_0^2 x \quad sau \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Ecuația :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

se numeşte **ecuația diferențială de mişcare a oscilatorului armonic liniar**. În ecuație, $\ddot{x}$ este accelerația oscilatorului, x este distanța la care se găseşte acesta față de poziția de echilibru (pe scurt, **elongație**), iar ω_0^2 este o constantă reală, pozitivă, care cuprinde informația fizică legată de forțele ce determină mişcarea oscilatorie şi de corpul antrenat în mişcare. Numele pe care parametrul ω_0 îl poartă în fizică este acela de **pulsație**.

Aşa cum am văzut în prologul matematic al acestui capitol, ecuația diferențială a oscilatorului armonic liniar are soluția generală :

$$\boxed{x = A\,sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

Constantele A (**amplitudinea**) şi φ (**faza inițială**) sunt unic determinate dacă se cunosc **poziția inițială** a oscilatorului x_0 **şi viteza sa inițială** v_0 :

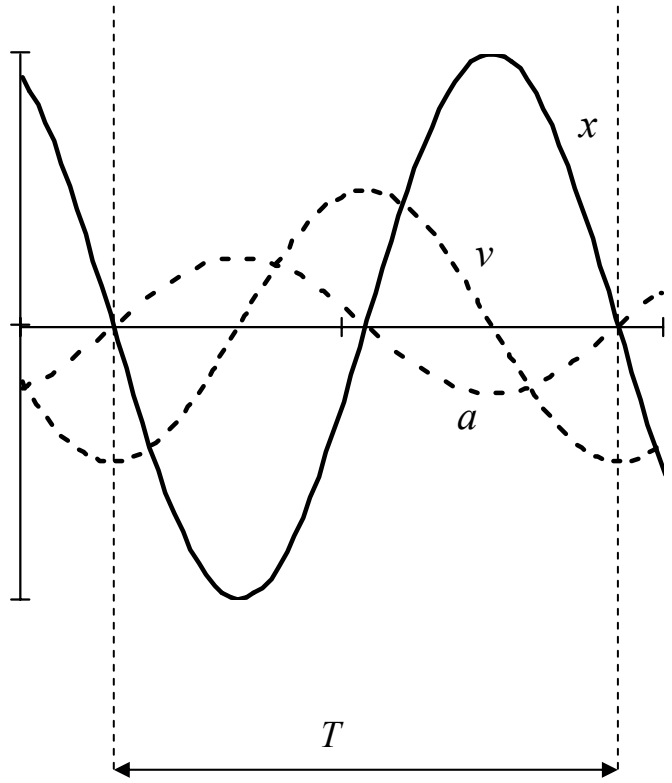
$$tg\,\varphi = \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \quad ; \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}$$

Perioada oscilației este $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, iar frecvența este $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

PROBLEMA DE LA PAGINA 143

Un punct material oscilează armonic, cu amplitudinea A şi faza inițială φ. Cum se modifică acestea dacă în momentul la care elongația este x_1 şi viteza este v_1 un impuls aplicat oscilatorului dublează instantaneu viteza acestuia ?

Elongația, viteza şi accelerația oscilatorului armonic ca funcții de timp



Cunoscând expresia matematică a elongației în funcție de timp, putem calcula formula vitezei prin derivarea elongației în raport cu timpul :

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A cos(\omega_0 t + \varphi)$$

respectiv, formula accelerației prin derivarea vitezei în raport cu timpul :

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 A sin(\omega_0 t + \varphi)$$

În graficul alăturat puteți vizualiza variația în timp a elongației, vitezei şi accelerației. Puteți remarca faptul că **viteza este în cvadratură cu elongația** (adică valorile extreme ale vitezei corespund unor elongații nule, sau invers) şi că **accelerația şi elongația sunt în opoziție de fază** (adică maximele accelerației corespund minimelor elongației şi invers).

CONCLUZIE

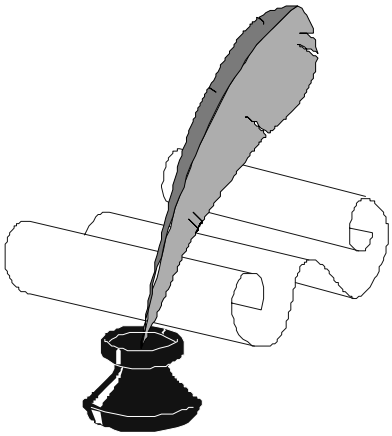
UN PUNCT MATERIAL EFECTUEAZĂ O MIŞCARE OSCILATORIE ARMONICĂ ÎN SITUAȚIA ÎN CARE **REZULTANTA FORȚELOR** CARE ACȚIONEAZĂ ASUPRA SA **ESTE DE TIP ELASTIC**. O FORȚĂ DE TIP ELASTIC ESTE CARACTERIZATĂ PRIN ACEEA CĂ ESTE PROPORȚIONALĂ CU DISTANȚA PÂNĂ LA PUNCTUL DE ECHILIBRU ŞI ORIENTATĂ SPRE ACESTA :

$$\mathbf{R} = -k\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad m\mathbf{a} = -k\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Constanta k depinde de situația fizică concretă în care se găseşte oscilatorul.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 144

Pentru ca rezultanta unor forțe să fie de tip elastic **nu** este necesar ca măcar una dintre aceste forțe să fie o forță elastică. De exemplu, un corp care plutește pe apă poate fi făcut să oscileze armonic numai sub acțiunile forțelor de greutate şi arhimedică.



Pornind de la ecuația diferențială de mişcare :

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

şi amplificând-o cu $2\dot{x}$, obținem :

$$2\dot{x}\ddot{x} = -2\omega_0^2 x\dot{x} \quad \Leftrightarrow \quad 2\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} = -2\omega_0^2 x\frac{dx}{dt}$$

sau :

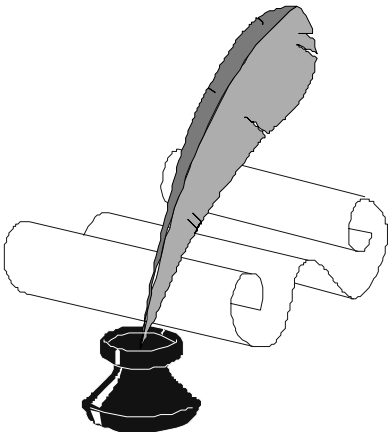
$$\frac{d\left(\dot{x}^2\right)}{dt} = -\frac{d\left(\omega_0^2 x^2\right)}{dt}$$

Prin integrare în raport cu timpul obținem :

$$\dot{x}^2 = -\omega_0^2 x^2 + const.$$

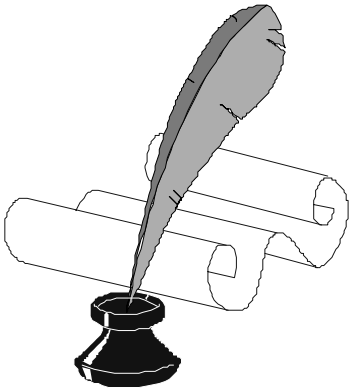
Amplificând prin $m/2$ şi ținând cont că $\omega_0^2 = k/m$, rezultă :

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = -\frac{m\frac{k}{m}x^2}{2} + const \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = const.$$



În ultima relație, termenii din stânga au semnificațiile de energie cinetică, respectiv energie potențială asociată unei forțe de tip elastic. Suma celor doi termeni reprezintă **energia mecanică totală** a oscilatorului armonic. Concluzia pe care o tragem este următoarea :

Energia mecanică totală a oscilatorului armonic este constantă în timp. Cu toate acestea, energiile cinetică şi potențială variază în timp. Micşorarea energiei cinetice este compensată de o creştere a celei potențiale sau invers.



Deoarece elongația şi viteza sunt în cvadratură, rezultă că energia mecanică totală a oscilatorului armonic este fie egală cu energia potențială maximă (corespunzătoare unei elongații egale cu $\pm A$), fie egală cu energia cinetică maximă (avută în momentul în care oscilatorul trece prin poziția de echilibru) :

$$W = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{max}^2}{2}$$

COMENTARIUL DE LA PAGINA 145

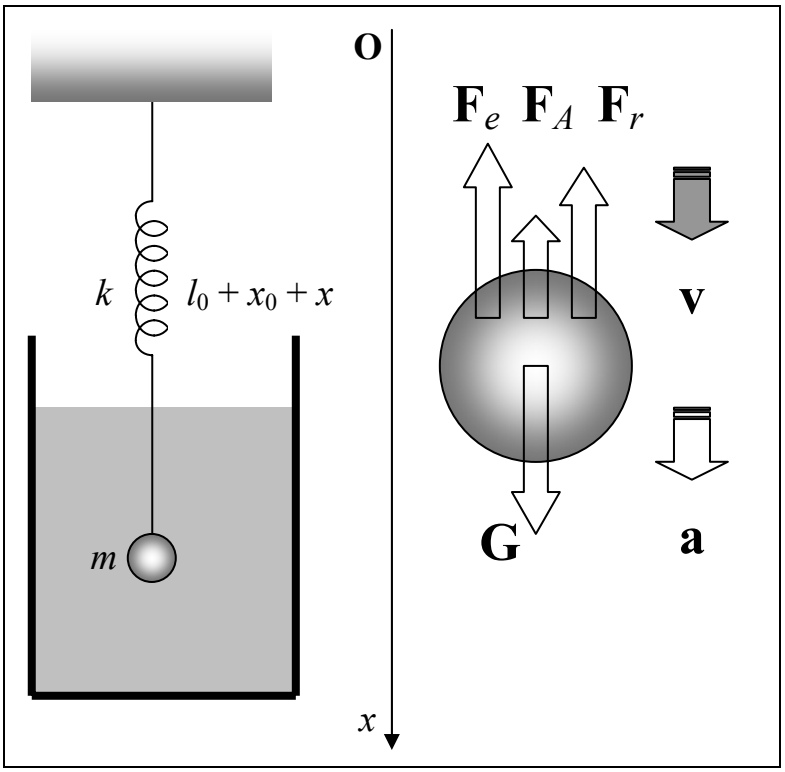
În aparență energia potențială a unui oscilator armonic :

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

nu are o variație armonică în timp. Totuşi, expresia sa matematică poate fi pusă sub forma : $W_p = \frac{kA^2}{2}\frac{1 - cos\ 2\left(\omega_0 t + \varphi\right)}{2} = \frac{kA^2}{4} - \frac{kA^2}{4}cos\ 2\left(\omega_0 t + \varphi\right)$

care corespunde unei variații armonice în timp.

3.2.3. OSCILATORUL AMORTIZAT



Să complicăm un pic viața „cobaiului” nostru ! De aceasta dată, corpul m se deplasează în interiorul unui lichid. Apar două noi forțe care acționează asupra corpului :

- Forța arhimedică $\mathbf{F}_A$
- Forța de rezistență la înaintare $\mathbf{F}_r$

Este suficient să ştiți că forța arhimedică reprezintă o fracțiune $\rho_{lichid}/\rho_{corp}$ din greutatea corpului şi este orientată în sens invers acesteia :

$$\mathbf{F}_A = -\frac{\rho_l}{\rho_c}\mathbf{G}$$

şi că forța de rezistență la înaintare este proporțională cu viteza corpului şi are sens opus acesteia :

$$\mathbf{F}_r = -c\mathbf{v}$$

Conform principiilor mecanicii newtoniene, putem scrie :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_r + \mathbf{G}$$

sau :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_e - c\mathbf{v} + \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right)\mathbf{G}$$

Proiectând relația pe axa Ox din figură obținem :

$$ma = -k(x + x_0) - cv + \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right)mg$$

Coordonata x_0 corespunde poziției de echilibru, în care accelerația este nulă $a = 0$, iar corpul este în repaus $v = 0$. Rezultă :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 146

Forța arhimedică reprezintă rezultanta forțelor de presiune pe care un lichid în echilibru şi în repaus le exercită asupra unui corp cufundat în interiorul său. **Forța arhimedică este numeric egală cu greutatea volumului de lichid dezlocuit de corp** : $F_A = \rho_l V_c g = \rho_l \frac{m_c}{\rho_c} g = \frac{\rho_l}{\rho_c} G_c$.

$$0 = -kx_0 + \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right)mg \quad \Leftrightarrow \quad kx_0 = \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right)mg$$

În poziția de neechilibru avem :

$$ma = -kx - kx_0 - cv + kx_0 \quad \Leftrightarrow \quad ma = -cv - kx$$

Împărțind prin m şi notând $c/v = 2\gamma$, $k/m = \omega_0^2$, obținem :

$$a = -2\gamma v - \omega_0^2 x \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

UN PUNCT MATERIAL EFECTUEAZĂ O **MIŞCARE OSCILATORIE AMORTIZATĂ** ÎN SITUAȚIA ÎN CARE **REZULTANTA FORȚELOR** CARE ACȚIONEAZĂ ASUPRA SA **ESTE O COMBINAȚIE ÎNTRE O FORȚĂ DE TIP ELASTIC ŞI O FORȚĂ DE REZISTENȚĂ LA ÎNAINTARE PROPORȚIONALĂ CU VITEZA** :

$$\mathbf{R} = -c\mathbf{v} - k\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad m\mathbf{a} = -c\mathbf{v} - k\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Constantele k şi c depind de situația fizică concretă în care se găseşte oscilatorul. Constantele γ şi ω_0 se numesc **factor de atenuare**, respectiv **pulsație proprie**.

După cum am arătat în subcapitolul de început, ecuația diferențială a oscilatorului amortizat poate avea trei tipuri de soluții generale, în funcție de relația între constantele γ şi ω_0. Să discutăm în continuare cele trei tipuri de soluții şi sensul fizic al acestora.

Cazul A)

În cazul **A)** soluția generală a ecuației diferențiale de mişcare a oscilatorului amortizat este :

$$\boxed{x = e^{-\gamma t}X = Ae^{-\gamma t}sh(\Omega t + \varphi) = Ae^{-\gamma t}\, sh\left(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\, t + \varphi\right) \quad ; \quad \gamma > \omega_0}$$

Constantele de integrare A (amplitudinea inițială) şi φ (faza inițială) sunt unic determinate dacă se cunosc poziția inițială a oscilatorului şi viteza sa inițială. În funcție de aceşti doi parametri sunt posibile mai multe tipuri de evoluție ulterioară.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 147

Dacă un corp material se deplasează în interiorul unui fluid cu o anumită viteză v, asupra corpului acționează o forță de rezistență la înaintare care depinde de viteza corpului şi vâscozitatea lichidului. Vâscozitatea unui lichid se manifestă în timpul curgerii acestuia sub forma unor forțe de frecare între straturile de lichid învecinate. Dacă corpul care se deplasează în lichid are formă sferică şi dacă viteza sa nu depăşeşte anumite valori forța de rezistență la înaintare este dată de legea lui Stokes :

$F_r = 6\pi r\eta v$ (η - viscozitatea, r – raza corpului sferic)

Viteza oscilatorului este dată de expresia :

$$v = \dot{x} = -\gamma A e^{-\gamma t} sh(\Omega t + \varphi) + \Omega A e^{-\gamma t} ch(\Omega t + \varphi) = A e^{-\gamma t}\left[-\gamma\, sh(\Omega t + \varphi) + \Omega\, ch(\Omega t + \varphi)\right]$$

La momentul inițial ($t = 0$), elongația şi viteza au expresiile

$$\begin{cases} x_0 = A\, sh\,\varphi \\ v_0 = -\gamma A\, sh\,\varphi + \Omega A\, ch\,\varphi \end{cases}$$

❖ **În cazul în care punctul de plecare se află în zona negativă a axei** ($x_0 < 0$), rezultă $sh\ \varphi < 0$ astfel încât $v_0 > 0$ (adică oscilatorul se mişcă în sensul pozitiv al axei). Ecuația :

$$x = A e^{-\gamma t} sh(\Omega t + \varphi) = A e^{-\gamma t} sh(\Omega t - |\varphi|) = 0$$

admite soluția :

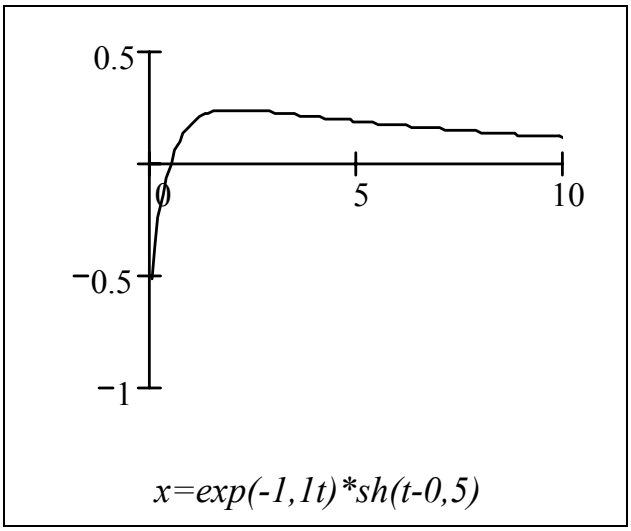
$$t_1 = \frac{|\varphi|}{\Omega}$$

ceea ce înseamnă că oscilatorul trece la acest moment de timp prin poziția de echilibru, cu viteza :

$$v = A\Omega e^{-\gamma \frac{|\varphi|}{\Omega}} > 0$$

Viteza oscilatorului se anulează corespunzător condiției :

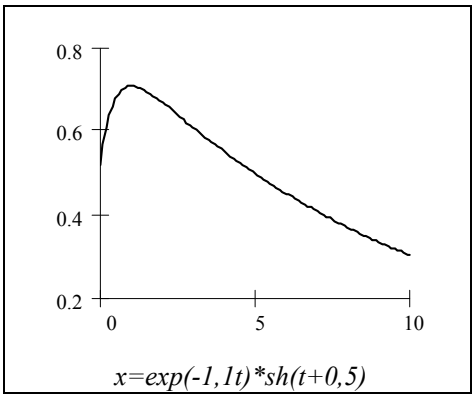
$$-\gamma sh(\Omega t - |\varphi|) + \Omega ch(\Omega t - |\varphi|) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{1}{\Omega}\left[|\varphi| + arcth\frac{\Omega}{\gamma}\right] > t_1$$

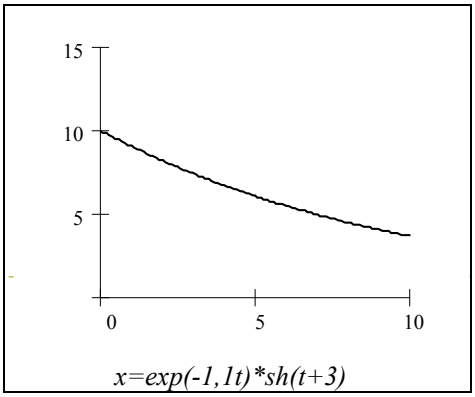


În acest moment, sensul vitezei se modifică şi punctul material revine către poziția de echilibru. Cum elongația x nu se mai anulează pentru nici-o altă valoare a timpului, rezultă că punctul material nu va mai trece niciodată prin poziția de echilibru, dar se va apropia asimptotic de acesta deoarece $\lim_{t\to\infty} x = 0$. Graficul alăturat prezintă variația elongației în funcție de timp în cazul discutat. Se remarcă faptul că **nu există** mişcarea oscilatorie. Spunem că **mişcarea este aperiodică**.

PROBLEMA DE LA PAGINA 148

Obțineți expresiile amplitudinii inițiale A şi fazei inițiale φ în funcție de elongația inițială x_0 şi viteza inițială v_0.





❖ **În cazul în care punctul de plecare se află în zona pozitivă a axei** ($x_0 > 0$), rezultă $sh\ \varphi > 0$ şi $\varphi > 0$. În această situaţie, anularea elongaţiei nu se mai poate realiza la nici-un moment de timp ulterior. Viteza iniţială poate avea atât valori pozitive (cazul $-\gamma A sh\varphi + \Omega A ch\varphi > 0$) cât şi negative. În primul caz, punctul material se depărtează iniţial de poziţia de echilibru până în punctul în care viteza se anulează, iar apoi se apropie asimptotic de punctul de echilibru (vezi graficul alăturat).

Dacă viteza iniţială este negativă, punctul material va evolua asimptotic către poziţia de echilibru (vezi graficul alăturat).

Şi în aceste două situaţii mişcarea punctului material este una **aperiodică**.

✍ În concluzie, în cazul :

$$\boxed{-\left(-\gamma^2 + \omega_0^2\right) = \gamma^2 - \omega_0^2 = \Omega^2 \geq 0}$$

mişcarea punctului material este aperiodică.

Cazul B)

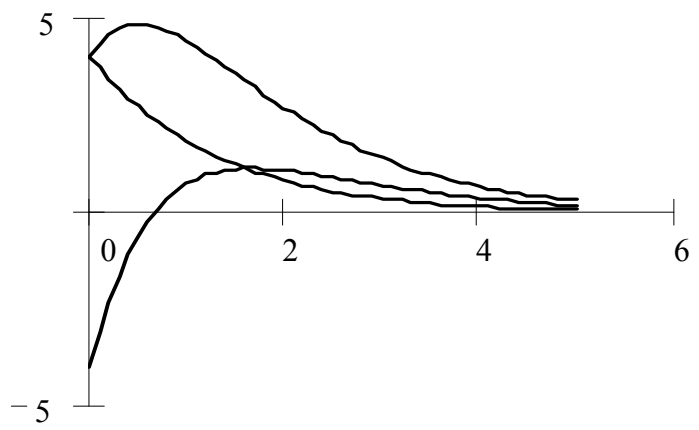
În cazul **B)** soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de mişcare a oscilatorului amortizat este :

$$\boxed{x = (At + B)e^{-\gamma t} \quad ; \quad \omega_0 = \gamma}$$

Poziţia şi viteza iniţială sunt :

OBSERVAŢIA DE LA PAGINA 149

Deşi soluţiile pe care le discutăm aici sunt obţinute prin rezolvarea „ecuaţiei oscilatorului amortizat”, punctul material a cărui ecuaţie de mişcare corespunde cazurilor **A)** şi **B) nu este un oscilator**, mişcarea sa fiind aperiodică.



Mişcare aperiodică critică

$$\begin{cases} x_0 = B \\ v_0 = A - \gamma B \end{cases}$$

Şi în această situaţie, în funcţie de valorile iniţiale ale elongaţiei şi vitezei, putem întâlni trei forme de mişcare, asemănătoare cu cele obţinute în cazul precedent. Vorbim despre o **mişcare aperiodică critică**.

✍ În concluzie, în cazul :

$$\boxed{-\gamma^2 + \omega_0^2 = 0}$$

mişcarea punctului material este aperiodică critică.

Cazul C)

În cazul **C)** soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de mişcare a oscilatorului amortizat este :

$$\boxed{x = Ae^{-\gamma t}\, sin(\omega t + \varphi) = Ae^{-\gamma t}\, sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t + \varphi\right) \quad ; \quad \omega_0 > \gamma}$$

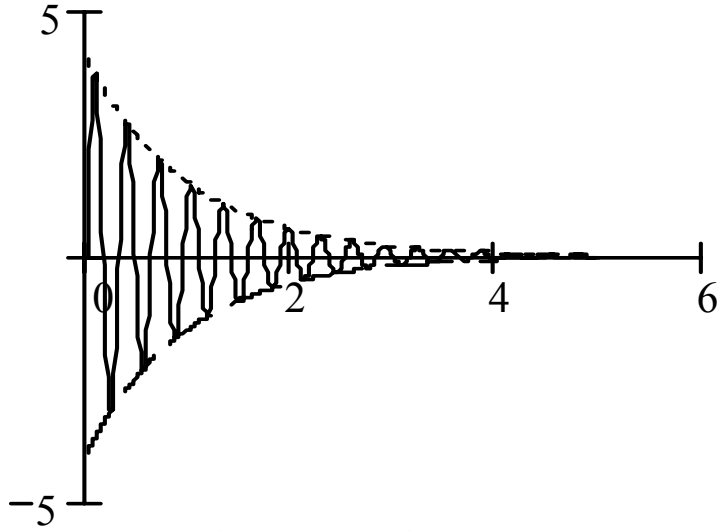
Poziţia şi viteza iniţială sunt :

$$\begin{cases} x_0 = A\, sin\, \varphi \\ v_0 = -\gamma A e^{-\gamma t}\, sin\, \varphi + \omega A\, cos\, \varphi \end{cases}$$

(din aceste ecuaţii se pot calcula valorile amplitudinii iniţiale A şi fazei iniţiale φ).

PROBLEMA DE LA PAGINA 150

Obţineţi expresiile amplitudinii iniţiale A şi fazei iniţiale φ în funcţie de elongaţia iniţială x_0 şi viteza iniţială v_0.



Oscilație pseudoarmonică
x = 4 exp(-x) sin(20x)

Aşa cum se poate vedea din graficul alăturat, în acest caz mişcarea punctului material este oscilatorie, dar amplitudinea oscilației scade exponențial în timp. Caracterul de mişcare oscilatorie, asemănătoare oscilației armonice, este cu atât mai pronunțat cu cât ω_0 are valori mai mari decât γ. Un asemenea tip de mişcare se numeşte **oscilație pseudoarmonică**.

✍ În concluzie, în cazul :

$$\boxed{-\gamma^2 + \omega_0^2 = \omega^2 > 0}$$

mişcarea punctului material este periodică şi este numită **oscilație pseudoarmonică**.

Trebuie făcută o remarcă în ceea ce priveşte caracterul periodic al oscilației pseudoarmonice. În acest caz valorile elongației (sau vitezei, sau accelerației) **nu** se repetă identic la intervale de timp egale. La intervale de timp egale au loc doar trecerile prin starea de echilibru sau stările de elongație maximă. *În acest sens*, „perioada” unei oscilații pseudoarmonice are expresia :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

COMENTARIUL DE LA PAGINA 151

Nici noțiunea de „amplitudine” nu mai are aceeaşi semnificație ca şi în cazul oscilației armonice. Definind drept „amplitudine” coeficientul funcției armonice : $\mathcal{A}(t) = Ae^{-\gamma t}$, observăm că aceasta este o funcție care scade exponențial în timp. Un asemenea tip de oscilație pseudoarmonică se mai poate numi **oscilație armonică modulată în amplitudine**.

Pentru a caracteriza gradul de amortizare a mişcării se poate utiliza mărimea denumită **decrement logaritmic** şi definită prin relaţia (T este perioada oscilatorului amortizat):

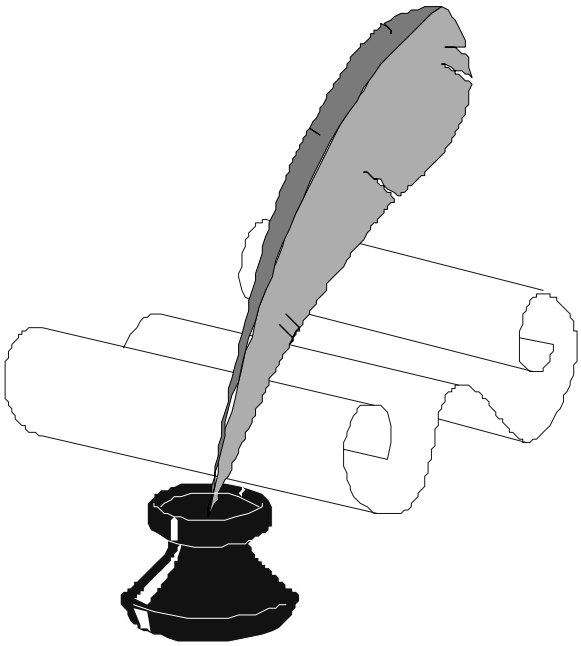
$$\delta = ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$$

Cu cât decrementul logaritmic are valori mai mari, cu atât amortizarea oscilaţiei este mai rapidă.

Conform ecuaţiei de mişcare a oscilatorului amortizat, rezultă :

$$\delta = ln\left(\frac{Ae^{-\gamma t}\, sin(\omega t + \varphi)}{Ae^{-\gamma(t+T)}\, sin(\omega t + \omega T + \varphi)}\right) = \gamma T = \frac{2\pi\gamma}{\omega} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

Se observă că valoarea decrementului logaritmic este cu atât mai mare cu cât parametrul γ are o valoare mai mare. Din acest motiv, parametrul γ se şi numeşte coeficient de atenuare. Mai putem remarca şi faptul că pentru acelaşi coeficient de atenuare, amortizarea este mai pronunţată la frecvenţe de oscilaţie mari.



O altă observaţie care se poate face este aceea că în cazul unei oscilaţii pseudoarmonice elongaţia şi viteza nu mai sunt în cvadratură, aşa cum este cazul oscilaţiei armonice. Viteza oscilatorului :

$$v = -\gamma A e^{-\gamma t}\, sin(\omega t + \varphi) + \omega A e^{-\gamma t}\, cos(\omega t + \varphi)$$

poate fi pusă sub forma :

$$v = \frac{Ae^{-\gamma t}}{\omega_0} cos(\omega t + \varphi + \Delta\varphi)$$

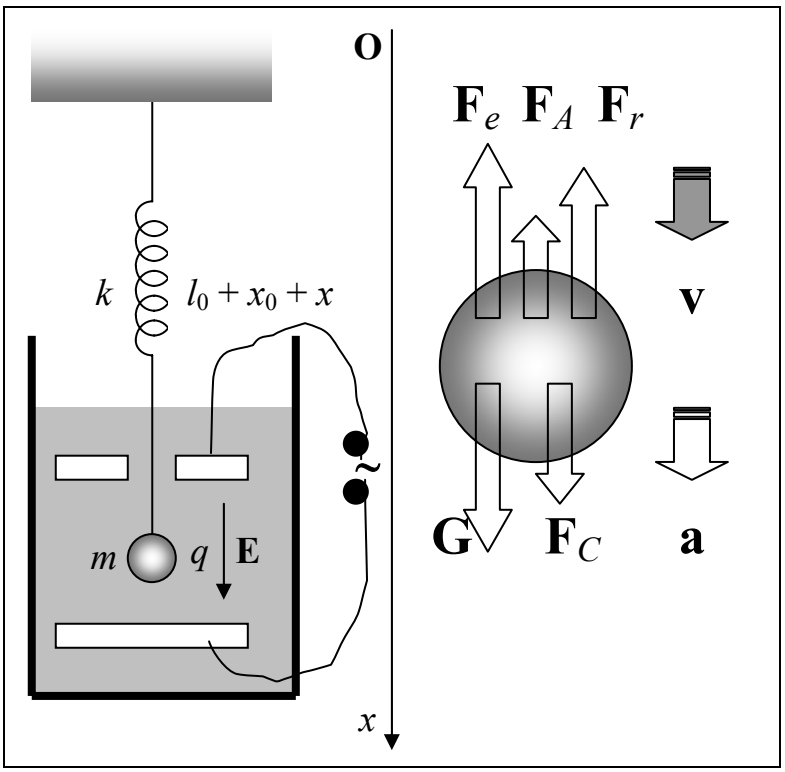
Diferenţa de fază suplimentară (faţă de $\pi/2$) între elongaţie şi viteză, $\Delta\varphi$, este :

$$\Delta\varphi = arctg\frac{\gamma}{\omega} = arctg\frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

PROBLEMA DE LA PAGINA 152

Determinaţi expresia defazajului dintre elongaţie şi acceleraţie în cazul oscilatorului pseudoarmonic.

3.2.4.OSCILAȚII FORȚATE



De această dată „cobaiul” nostru se găseşte într-o nouă postură : corpul de masă m este încărcat electric cu sarcina q şi este plasat între plăcile unui condensator plan. La rândul său, condensatorul plan se află în circuitul electric al unei surse de curent alternativ. Fără să intru în prea multe detalii (este loc pentru ele în viitor), vă voi spune că în acest caz asupra corpului m acționează şi o forță coulombiană care depinde armonic de timp :

$$F_C = F_0 \sin \omega_e t$$

unde ω_e este pulsația curentului alternativ generat de sursă.

Conform principiilor mecanicii newtoniene, putem scrie :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_r + \mathbf{G} + \mathbf{F}_C$$

sau :

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_e - c\mathbf{v} + \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right)\mathbf{G} + \mathbf{F}_C$$

Proiectând relația pe axa Ox din figură obținem :

$$ma = -k(x + x_0) - cv + \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right)mg + F_0 \sin \omega_e t$$

Coordonata x_0 corespunde poziției de echilibru, în care accelerația este nulă $a = 0$, corpul este în repaus $v = 0$, iar forța coulombiană este de asemenea nulă. Rezultă :

$$0 = -kx_0 + \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right)mg \quad \Leftrightarrow \quad kx_0 = \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right)mg$$

În poziția de neechilibru avem :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 153

Forțele electrostatice, numite şi forțe coulombiene, se manifestă asupra corpurilor încărcate electric şi aflate în prezența unui câmp electric. Modulul forței este numeric egal cu produsul dintre sarcina corpului şi intensitatea câmpului electric : $F_C = qE$. Între plăcile unui condensator plan, câmpul electric este uniform, iar intensitatea sa are expresia : $E = Q/(\varepsilon S)$, unde Q este sarcina condensatorului, ε permitivitatea mediului dintre plăci, iar S este suprafața plăcilor.

$$ma = -kx - kx_0 - cv + kx_0 + F_0 \sin\omega_e t \quad \Leftrightarrow \quad ma + cv + kx = F_0 \sin\omega_e t$$

Împărțind prin m şi notând $c/v = 2\gamma$, $k/m = \omega_0^2$, $\Phi = F_0/m$ obținem :

$$a + 2\gamma v + \omega_0^2 x = \Phi \sin\omega_e t \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \Phi \sin\omega_e t$$

UN PUNCT MATERIAL EFECTUEAZĂ O **MIŞCARE OSCILATORIE FORȚATĂ** ÎN SITUAȚIA ÎN CARE REZULTANTA FORȚELOR CARE ACȚIONEAZĂ ASUPRA SA ESTE O COMBINAȚIE ÎNTRE O FORȚĂ DE TIP ELASTIC ŞI O FORȚĂ DE REZISTENȚĂ LA ÎNAINTARE PROPORȚIONALĂ CU VITEZA, IAR DIN EXTERIOR SE EXERCITĂ O FORȚĂ ARMONICĂ SUPLIMENTARĂ :

$$\mathbf{R} = -c\mathbf{v} - k\mathbf{x} + \mathbf{F}_0 \sin\omega_e t \quad \Leftrightarrow \quad m\mathbf{a} = -c\mathbf{v} - k\mathbf{x} + \mathbf{F}_0 \sin\omega_e t$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \Phi \sin\omega_e t$$

Constantele k, c şi Φ depind de situația fizică concretă în care se găseşte oscilatorul. Constanta ω_0 se numeşte **pulsație proprie**.

Din discuția problemei matematice expuse la începutul acestui capitol am reținut că soluția ecuației oscilatorului forțat se compune din doi termeni : soluția generală a ecuației oscilatorului amortizat şi o soluție particulară a ecuației oscilatorului forțat. Indiferent de cele trei cazuri ale soluției generale a ecuației oscilatorului amortizat, putem constata că după un anumit interval de termenul referitor la oscilațiile amortizate devine neglijabil (el scade exponențial în timp), rămânând doar termenul corespunzător soluției particulare a ecuației oscilatorului forțat.

After un interval de timp mai mult sau mai puțin însemnat de la momentul declanşării oscilației forțate **soluția staționară a ecuației oscilatorului forțat** devine :

$$\boxed{x = \frac{\Phi}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \sin\left[\omega_e t - arctg\left(\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right)\right] = B \sin\left(\omega_e t - \varphi_e\right)}$$

Această lege de mişcare corespunde unei oscilații armonice cu perioada egală cu perioada forței excitatoare externe.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 154

Există mai multe modalități de a genera curent electric alternativ. Una dintre ele constă în rotirea unui cadru rectangular de sârmă în prezența unui câmp magnetic uniform. Forțele de natură electromagnetică care acționează asupra electronilor liberi ai materialului din care este confecționat cadrul îi determină pe aceştia să oscileze armonic. Această oscilație se transmite cu viteza luminii în tot circuitul electric, determinând astfel „curentul electric alternativ”. Dacă în circuit este inserat şi un condensator, curentul electric îl încarcă sau descarcă în acelaşi ritm cu cel al oscilațiilor electronilor. De aceea, sarcina acumulată pe condensator variază armonic în timp.

Putem trage concluzia că după un timp suficient de lung de la începerea acțiunii forței armonice externe, oscilatorul forțat execută o oscilație armonică a cărei amplitudine depinde de amplitudinea forței, de masa oscilatorului, de pulsația proprie ω_0, de factorul de atenuare γ şi de pulsația forței externe ω_e.

Odată cu variația pulsației forței externe, variază şi amplitudinea oscilației forțate. Maximul amplitudinii oscilației forțate corespunde pulsației pentru care derivata amplitudinii se anulează :

$$\frac{dB}{d\omega_e}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-\frac{1}{2}\Phi\left[-4\omega_e\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)+8\gamma^2\omega_e\right]}{\left[\left(\omega_0^2-\omega_e^2\right)^2+4\gamma^2\omega_e^2\right]^{3/2}}=0$$

Rezultă :

$$\omega_{e,rez}^2=\omega_0^2-2\gamma^2$$

Înlocuind în expresia amplitudinii, găsim expresia matematică a amplitudinii maxime de oscilație forțată :

$$B_{max}=\frac{\Phi}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}$$

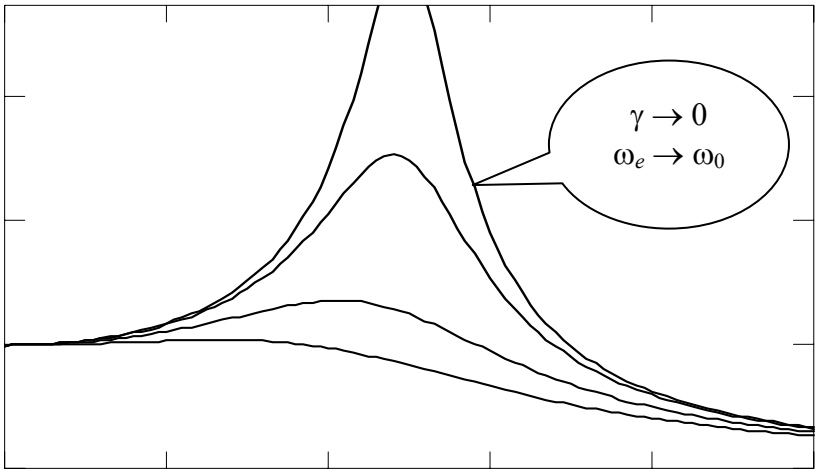
Dacă oscilația forțată se face cu amplitudine maximă, spunem că s-a produs **rezonanța amplitudinii**.

Amplitudinea la rezonanță depinde de pulsația proprie şi de factorul de atenuare. În cazul în care factorul de atenuare este neglijabil, iar pulsația forței externe egalează pulsația proprie, amplitudinea de rezonanță tinde către valori foarte mari (infinite).

Reprezentarea amplitudinii de rezonanță în funcție de pulsația forței excitatoare externe este prezentată în graficul următor :

EXPERIENȚA DE LA PAGINA 155

Puteți realiza o experiență foarte simplă : luați două fire de ață de lungimi egale şi suspendați cu ajutorul lor două mici corpuri identice, realizând astfel două pendule gravitaționale, aflate la o distanță nu prea mare unul față de celălalt. Puneți unul dintre pendule în oscilație, într-un plan perpendicular pe planul format de cele două fire de ață. Veți observa că, în timp, primul pendul îşi micşorează amplitudinea oscilației până la oprire, în vreme ce al doilea, fără nici-o altă intervenție din exterior începe să oscileze, atingând o amplitudine de oscilație maximă când primul se opreşte. În continuare evoluția se inversează : oscilația „trece” de la al doilea pendul la primul. Puteți găsi o explicație ?



Variația amplitudinii în funcție de pulsația externă

Un alt caz de rezonanță este **rezonanța vitezei**.

Rezonanța vitezei se produce când pulsația forței externe are o asemenea valoare încât amplitudinea vitezei oscilatorului forțat este maximă.

Viteza oscilatorului este prima derivată a elongației în raport cu timpul :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_e \Phi}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} cos\left[\omega_e t - arctg\left(\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right)\right]$$

Amplitudinea vitezei este :

$$V = \frac{\omega_e \Phi}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

Amplitudinea vitezei este maximă când derivata sa în raport cu pulsația externă se anulează :

$$\frac{dV}{d\omega_e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Phi}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} + \frac{-\frac{1}{2}\omega_e \Phi\left[-4\omega_e\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right) + 8\gamma^2\omega_e\right]}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2\right]^{3/2}} = 0$$

COMENTARIUL DE LA PAGINA 156

Fenomenul de rezonanță are destul de mare importanță în practică. De exemplu, dacă frecvența proprie de oscilație a structurii de beton a unei clădiri este apropiată de frecvența undelor seismice în timpul unui cutremur, amplitudinea de oscilație a structurii poate crește foarte mult, ducând la distrugerea acesteia. Din acest motiv, proiectanții trebuie să găsească mijloace prin care energia de vibrație a structurii să fie disipată cât mai accentuat (de exemplu, se poate accepta ca pereții interiori să sufere deteriorări mari, asociate cu absorbția de energie de la structura de rezistență).

Soluția acestei ecuații este :

$$\omega_{e,V\,max}^2 = \omega_0^2$$

Maximul amplitudinii vitezei este :

$$\boxed{V_{max} = \frac{\Phi}{2\gamma}}$$

Puterea dezvoltată de forța externă pentru întreținerea mişcării unității de masă a oscilatorului este :

$$p = \frac{F_e}{m} \cdot v = \frac{\omega_e \Phi^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_e^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} sin\,\omega_e t\, cos\left[\omega_e t - arctg\left(\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}\right)\right]$$

sau :

$$p = \Phi V\, sin\,\omega_e t\, cos\left[\omega_e t - \varphi_e\right]$$

Ştiind că :

$$sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta) = 2\, sin\,\alpha\, cos\,\beta$$

observăm că :

$$sin\,\omega_e t\, cos\left[\omega_e t - \varphi_e\right] = \frac{1}{2} sin\left[2\omega_e t - \varphi_e\right] + \frac{1}{2} sin\,\varphi_e$$

astfel încât :

$$p = \frac{\Phi V}{2} sin\,\varphi_e + \frac{\Phi V}{2} sin\left(2\omega_e t + \varphi_e\right)$$

Media în timp a puterii care revine unității de masă este :

$$\langle p \rangle = \frac{\Phi V}{2} sin\,\varphi_e + \frac{\Phi V}{2} \langle sin\left(2\omega_e t + \varphi_e\right) \rangle$$

Cum media temporală a funcției armonice este nulă, rezultă :

$$\langle p \rangle = \frac{\Phi V}{2} sin\,\varphi_e$$

Puterea medie transferată oscilatorului este **maximă** atunci când pulsația externă corespunde obținerii rezonanței vitezei.

În acest caz $\varphi_e = \pi/2$, rezultând :

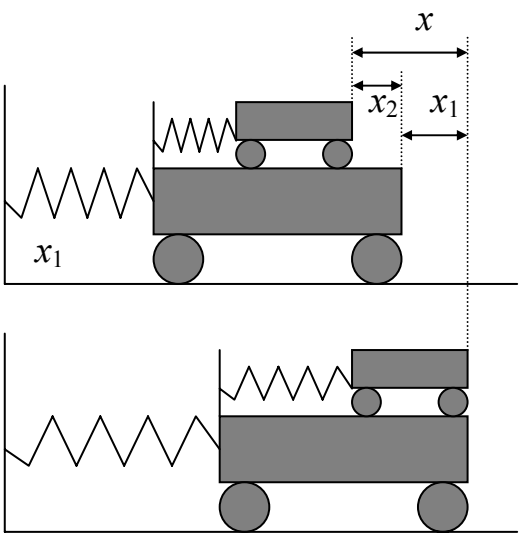
$$\boxed{\langle p \rangle_{max} = \frac{\Phi V_{max}}{2} = \frac{\Phi^2}{2\gamma}}$$

OBSERVAȚIA DE LA PAGINA 157

Puterea medie maximă transferată oscilatorului este proporțională cu pătratul accelerației maxime pe care i-o poate imprima forța externă acționând singură ($\Phi = F_0/m$). De aceea, vibrațiile externe care generează accelerații mari sunt cu mult mai periculoase decât cele care generează accelerații mici.

3.3. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR ARMONICE

3.3.1. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR AVÂND ACEEAȘI FRECVENȚĂ ȘI DIRECȚII PARALELE



Fie cele două cărucioare atașate resorturilor elastice din figura alăturată. Scoțând cărucioarele din pozițiile lor de echilibru ele vor efectua oscilații armonice. Să presupunem că pulsațiile acestor oscilații sunt egale (ceea ce înseamnă că și frecvențele de oscilație sau perioadele sunt egale). Elongația oscilației căruciorului inferior este egală cu deplasarea acestuia față de reperul fix din stânga și are expresia matematică :

$$x_1 = A_1 \, sin(\omega t + \varphi_1)$$

Elongația oscilației căruciorului superior, **măsurată în raport cu reperul din stânga solitar cu căruciorul inferior**, este :

$$x_2 = A_2 \, sin(\omega t + \varphi_2)$$

În raport cu reperul fix, elongația căruciorului superior este :

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \, sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \, sin(\omega t + \varphi_2)$$

CUGETAREA DE LA PAGINA 158

Un nou adevăr științific nu triumfă prin puterea de convingere asupra oponenților săi, făcându-i să zărească lumina, ci mai degrabă pentru că oponenții mor și crește o nouă generație care este familiarizată cu el.

Max Planck (1858–1947), fizician german

Putem extrage din acest exemplu următoarea concluzie generală :

✍ Dacă un punct material participă simultan la două oscilații care se fac pe direcții paralele, elongația rezultantă este suma algebrică a elongațiilor celor două oscilații.

Să examinăm consecințele matematice ale relațiilor precedente. Cu binecunoscuta relație :

$$sin(\alpha+\beta)=sin\,\alpha\,cos\,\beta+sin\,\beta\,cos\,\alpha$$

putem obține :

$$x=(A_1\,cos\,\varphi_1+A_2\,cos\,\varphi_2)sin\,\omega t+(A_1\,sin\,\varphi_1+A_2\,sin\,\varphi_2)cos\,\omega t$$

Cu notațiile :

$$\begin{cases} A\,sin\,\varphi=A_1\,sin\,\varphi_1+A_2\,sin\,\varphi_2 \\ A\,cos\,\varphi=A_1\,cos\,\varphi_1+A_2\,cos\,\varphi_2 \end{cases}$$

putem aduce expresia la forma :

$$x=A(sin\,\omega t\,cos\,\varphi+sin\,\varphi\,cos\,\omega t)=A\,sin(\omega t+\varphi)$$

Expresia elongației x este aceea a unei oscilații armonice de amplitudine A şi fază inițială φ, având aceeaşi frecvență ca şi cele două oscilații care se compun. Concluzia este următoarea :

✍ Prin compunerea a două oscilații armonice de frecvențe egale se obține tot o oscilație armonică, care are aceeaşi frecvență ca şi oscilațiile care se compun.

Expresia fazei inițiale rezultante este :

$$\boxed{tg\,\varphi=\frac{A_1\,sin\,\varphi_1+A_2\,sin\,\varphi_2}{A_1\,cos\,\varphi_1+A_2\,cos\,\varphi_2}}$$

Din expresiile care definesc amplitudinea şi faza inițială ale oscilației rezultante, obținem :

PROBLEMA DE LA PAGINA 159

Generalizați demonstrația făcută pe această pagină pentru un număr oarecare de oscilații armonice paralele şi de frecvențe egale.

$$A^2 \sin^2\varphi + A^2 \cos^2\varphi = A_1^2 \sin^2\varphi_1 + A_1^2 \cos^2\varphi_1 + A_2^2 \sin^2\varphi_2 + A_2^2 \cos^2\varphi_2 +$$
$$+ 2A_1A_2(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2)$$

Putem restrânge expresia astfel :

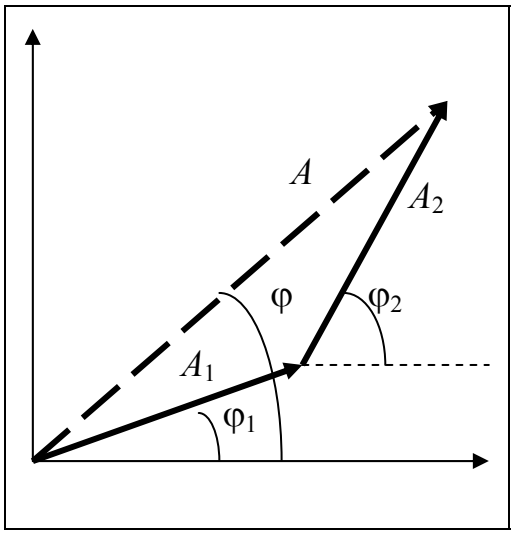
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

De aici obținem expresia amplitudinii rezultante :

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}$$

Putem remarca că valoarea amplitudinii rezultante depinde de diferența de fază dintre cele două oscilații. Dacă oscilațiile sunt în fază, adică diferența de fază este nulă : $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, amplitudinea rezultantă are valoare maximă : $A = A_1 + A_2$. Când oscilațiile sunt în opoziție de fază, adică când : $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$, amplitudinea rezultantă îşi atinge valoarea minimă : $A = |A_1 - A_2|$.

Metoda de compunere a oscilațiilor armonice paralele şi de frecvențe egale prezentată până în acest moment este **metoda algebrică**. Alături de metoda algebrică există şi aşa numita **metodă fazorială**.



În introducerea acestei secțiuni a manualului am arătat că proiecția unei mişcări circulare uniforme pe o axă este o mişcare oscilatorie armonică. Invers, o mişcare oscilatorie armonică poate fi reprezentată prin rotația uniformă a unui vector (viteza unghiulară de rotație a vectorului este egală cu pulsația oscilației, iar lungimea vectorului este egală cu amplitudinea oscilației). Acest vector se numeşte **fazor**. Compunerea a două sau mai multe oscilații paralele, de frecvențe egale, revine astfel la compunerea vectorială a fazorilor corespunzători (vezi figura alăturată).

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 160

Se compun fazorii care formează laturile unui poligon regulat, mai puțin una. Ce diferență de fază există între fazorul care corespunde laturii lipsă şi rezultanta compunerii fazoriale ?

3.3.2. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR PARALELE DE FRECVENȚE APROPIATE, FENOMENUL DE BĂTĂI

Putem da următoarea definiție :

Prin **bătăi** înțelegem rezultatul compunerii a două oscilații paralele ale căror frecvențe au valori foarte apropiate.

Pentru simplificare, vom considera două oscilații având amplitudinile egale şi faze inițiale nule :

$$x_1 = A\,sin\,\omega_1 t$$
$$x_2 = A\,sin\,\omega_2 t$$

Pulsațiile având valori apropiate, putem scrie relațiile :

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad ; \quad \omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad ; \quad \omega << \omega_0$$

Cu aceste notații, rezultă :

$$x = x_1 + x_2 = A\,sin\left[(\omega_0 - \omega)t\right] + A\,sin\left[(\omega_0 + \omega)t\right]$$

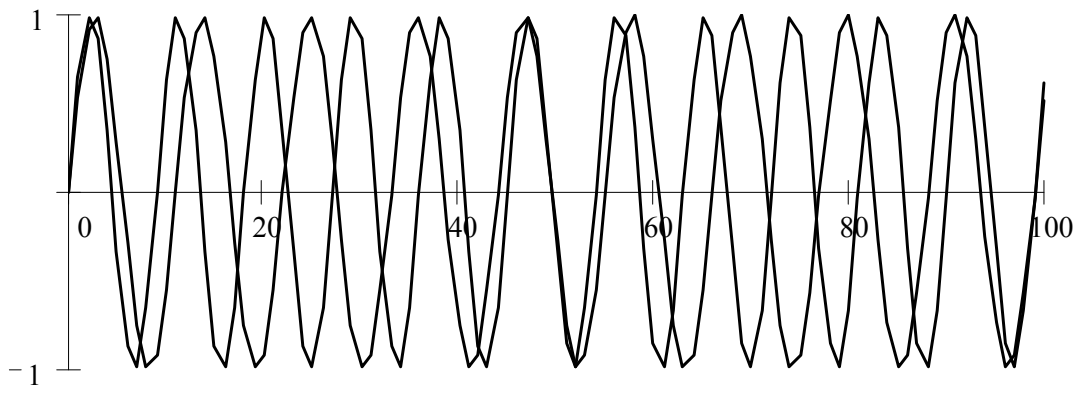
sau :

$$\boxed{x = 2A\,cos\,\omega t \cdot sin\,\omega_0 t = \mathcal{A}(t)\,sin\,\omega_0 t}$$

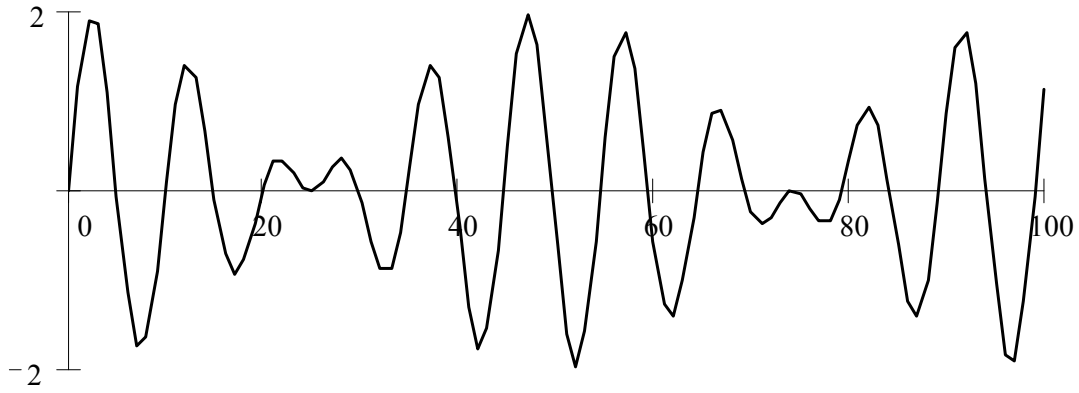
Observăm că ecuația care descrie rezultatul compunerii celor două oscilații are o formă asemănătoare cu aceea a unei oscilații armonice de pulsație ω_0, cu deosebirea că amplitudinea nu mai este constantă în timp. Perioada noii amplitudini $T = 2\pi/\omega$ are valoare mult mai mare decât perioada oscilațiilor $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Din acest motiv, spunem că prin compunerea celor două oscilații se obține o **oscilație pseudoarmonică modulată în amplitudine**.

OBSERVAȚIA DE LA PAGINA 161

Diferența dintre oscilația pseudoarmonică amortizată şi cea corespunzătoare fenomenului de bătăi este că în primul caz amplitudinea este o funcție strict descrescătoare de timp, în vreme ce în al doilea caz este o funcție armonică de timp.



Cele două oscilații



Rezultatul compunerii celor două oscilații

Graficele de mai sus reprezintă oscilațiile $sin\frac{2\pi}{9}t$ şi $sin\frac{2\pi}{11}t$, precum şi rezultatul compunerii lor $2cos\frac{4\pi}{99}\cdot sin\frac{40\pi}{99}$. Se observă că amplitudinea rezultantă variază periodic în timp între o valoare minimă nulă şi o valoare maximă egală cu dublul amplitudinii oscilațiilor care se compun. Dacă cele două oscilații ar fi reprezentat sunete emise de două diapazoane identice, dintre care unul uşor dezacordat, atunci la urechea noastră ar ajunge un sunet cu o frecvență practic egală cu aceea a sunetului emis de diapazonul acordat corect, dar a cărui intensitate variază periodic în timp între valori minime şi maxime. Senzația auditivă este aceea a ecoului unor lovituri periodice (bătăi), care se petrec undeva în depărtare. De aici provine şi numele dat acestui fenomen.

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 162

O modalitate de a acorda un pian este aceea de a folosi un diapazon etalon. Punând simultan în vibrație diapazonul şi coarda pianului se pot auzi bătăi din cauza diferenței de frecvență. Rolul acordorului este acela de a mări sau micşora tensiunea din coardă până când frecvențele de vibrație se egalează. Întrebarea este : acordarea realizată poate fi perfectă ?

3.3.3. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR AVÂND ACEEAȘI FRECVENȚĂ ȘI DIRECȚII PERPENDICULARE

Să considerăm un punct material asupra căruia acționează simultan două forțe elastice perpendiculare. Acționând separat, fiecare dintre forțe imprimă o mişcare oscilatorie armonică pe direcția sa :

$$x = A_1 \, sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$y = A_2 \, sin(\omega t + \varphi_2)$$

Mişcarea pe care o va efectua punctul material în prezența ambelor forțe va reprezenta compunerea acestor două oscilații armonice.

Vom determina în cele ce urmează **traiectoria** descrisă de punctul material. Traiectoria este definită astfel :

Traiectoria reprezintă locul geometric al tuturor punctelor din spațiu prin care trece un mobil în cursul mişcării sale.

După cum se remarcă din această definiție, traiectoria este independentă de timp, în sensul că ea este rezultatul întregului interval de timp al mişcării mobilului. Din acest motiv, putem trage următoarea concluzie :

Pentru a găsi ecuația traiectoriei unui mobil este suficient să eliminăm timpul între ecuațiile de mişcare corespunzătoare fiecărei axe de coordonate.

Pentru eliminarea timpului vom folosi relația :

$$sin^2 \omega t + cos^2 \omega t = 1$$

PROBLEMA DE LA PAGINA 163

Determinați expresia vitezei momentane a punctului material care participă simultan la cele două oscilații. Găsiți valorile momentelor de timp la care viteza are valori extreme.

Pentru a găsi expresiile lui *sin* ω*t* şi *cos* ω*t* procedăm astfel :

- dezvoltăm trigonometric expresiile elongațiilor :

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = A_1 \sin\omega t \cos\varphi_1 + A_1 \cos\omega t \sin\varphi_1$$
$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = A_2 \sin\omega t \cos\varphi_2 + A_2 \cos\omega t \sin\varphi_2$$

- alcătuim sistemul de ecuații :

$$\begin{cases} A_1 \sin\omega t \cos\varphi_1 + A_1 \cos\omega t \sin\varphi_1 = x \\ A_2 \sin\omega t \cos\varphi_2 + A_2 \cos\omega t \sin\varphi_2 = y \end{cases}$$

- soluțiile sale sunt :

$$\sin\omega t = \frac{\begin{pmatrix} x & A_1 \sin\varphi_1 \\ y & A_2 \sin\varphi_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} A_1 \cos\varphi_1 & A_1 \sin\varphi_1 \\ A_2 \cos\varphi_2 & A_2 \sin\varphi_2 \end{pmatrix}} = \frac{xA_2 \sin\varphi_2 - yA_1 \sin\varphi_1}{A_1 A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\cos\omega t = \frac{\begin{pmatrix} A_1 \cos\varphi_1 & x \\ A_2 \cos\varphi_2 & y \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} A_1 \cos\varphi_1 & A_1 \sin\varphi_1 \\ A_2 \cos\varphi_2 & A_2 \sin\varphi_2 \end{pmatrix}} = \frac{-xA_2 \cos\varphi_2 + yA_1 \cos\varphi_1}{A_1 A_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

- ridicând la pătrat şi adunând, obținem :

$$\frac{x^2 A_2^2 + y^2 A_1^2 - 2xyA_1A_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2)}{A_1^2 A_2^2 \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)} = 1$$

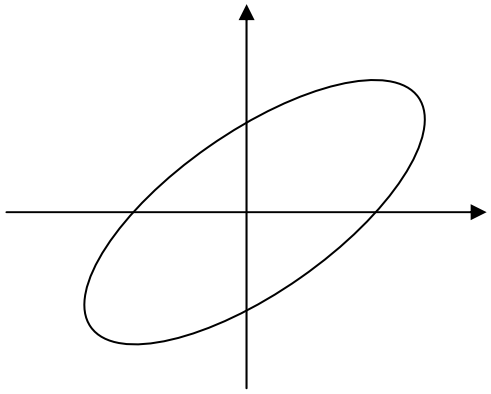
sau :

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

PROBLEMA DE LA PAGINA 164

Refaceți acest calcul pentru cazul în care unghiul dintre direcțiile celor două oscilații ar avea o valoare oarecare, cuprinsă între 0 şi π/2 radiani.

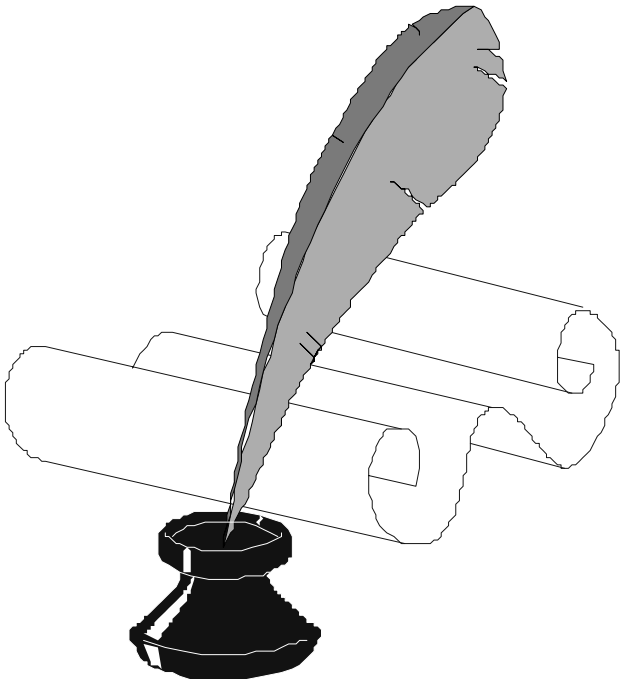
Acest rezultat matematic ne permite să tragem următoarele concluzii :



Traiectoria unui punct material care participă la două oscilații armonice de frecvențe egale și direcții perpendiculare

Dacă un punct material participă simultan la două oscilații armonice de frecvențe egale și direcții perpendiculare, traiectoria sa are în general forma unei elipse. Unghiul făcut de axele elipsei și axele de coordonate depinde de diferența de fază $\varphi_2 - \varphi_1$ între cele două oscilații. Valoarea semiaxelor depinde de amplitudinile oscilațiilor și de diferența de fază.

Putem discuta **câteva cazuri particulare** :



❖ Dacă diferența de fază dintre cele două oscilații este egală cu $\pm\pi/2$, (spunem în acest caz că oscilațiile sunt **în cvadratură de fază**) ecuația traiectoriei devine :

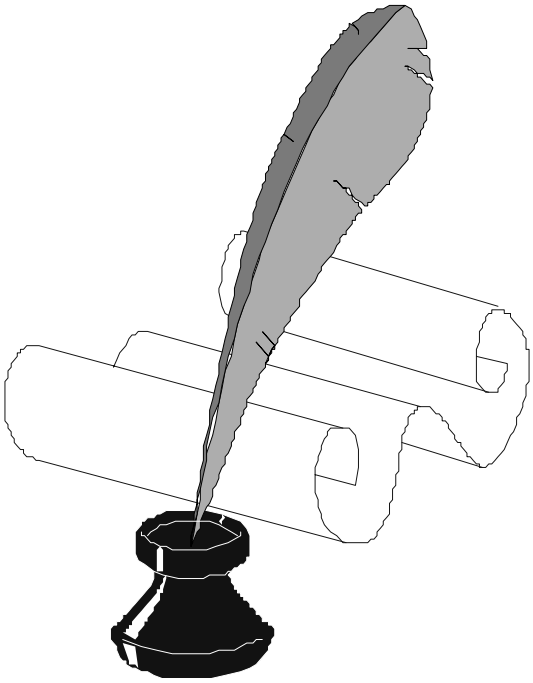
$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$$

Concluzia este următoarea :

La compunerea a două oscilații perpendiculare, armonice, de frecvențe egale, aflate în cvadratură de fază, traiectoria punctului material este o elipsă ale cărei axe coincid cu axele de coordonate și ale cărei semiaxe au valori egale cu amplitudinile celor două oscilații.

PROBLEMA DE LA PAGINA 165

Date fiind două surse diferite de oscilații, este aproape imposibil ca frecvențele lor să fie riguros egale. În aceste condiții diferența de fază variază în timp, iar figura Lissajous își modifică continuu înfățișarea. Problema este : dacă intervalul de timp după care formele figurii Lissajous se repetă în aceeași succesiune este de 5 secunde, care este diferența între frecvențele oscilațiilor care se compun ?



❖ Dacă diferența de fază dintre cele două oscilații este nulă, (spunem în acest caz că oscilațiile sunt **în fază**) ecuația traiectoriei devine

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}=0\Rightarrow\left(\frac{x}{A_1}-\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$

Concluzia este următoarea :

La compunerea a două oscilații perpendiculare, armonice, de frecvențe egale, aflate în fază, traiectoria punctului material este o dreaptă de pantă pozitivă şi egală cu raportul amplitudinilor oscilațiilor.

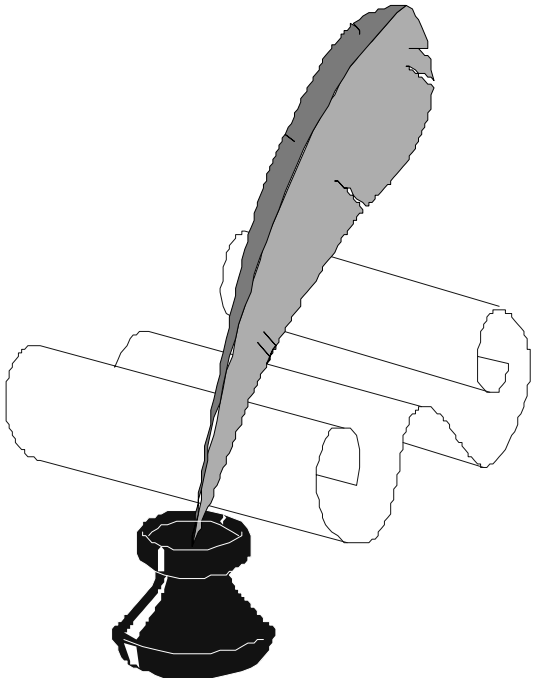
❖ Dacă diferența de fază dintre cele două oscilații este egală cu π, (spunem în acest caz că oscilațiile sunt **în opoziție de fază**) ecuația traiectoriei devine :

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}+2\frac{xy}{A_1A_2}=0\Rightarrow\left(\frac{x}{A_1}+\frac{y}{A_2}\right)^2=0$$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$

Concluzia este următoarea :

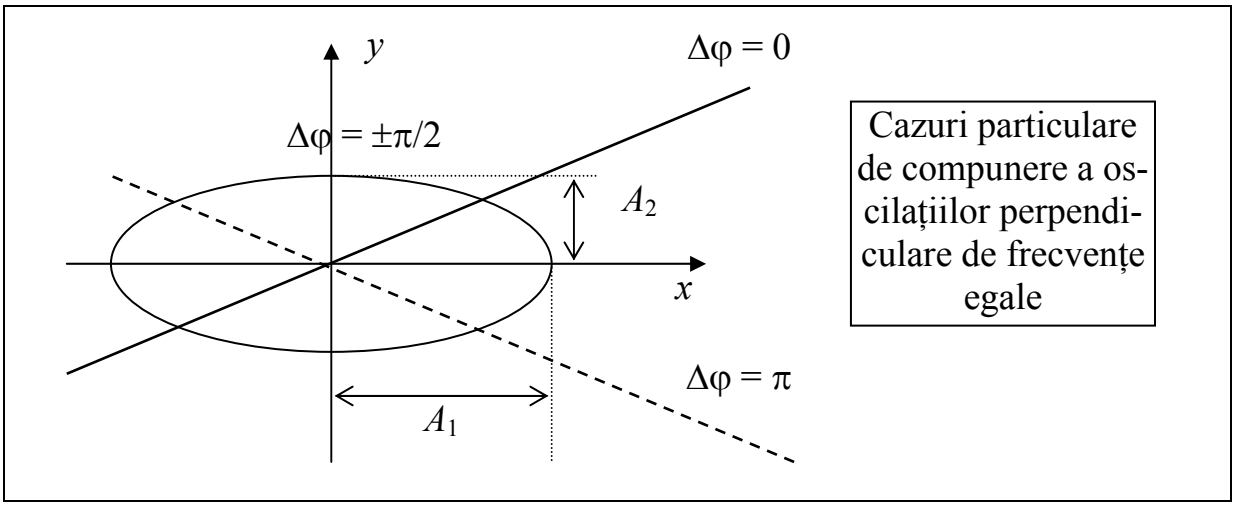
La compunerea a două oscilații perpendiculare, armonice, de frecvențe egale, aflate în opoziție de fază, traiectoria punctului material este o dreaptă de pantă negativă şi egală în modul cu raportul amplitudinilor oscilațiilor.



Traiectoriile descrise de punctul material în aceste trei cazuri particulare sunt prezentate în graficul care urmează :

PROBLEMA DE LA PAGINA 166

O oscilație electrică poate fi convertită în oscilație mecanică (sunet) cu ajutorul unui difuzor şi reconvertită în semnal electric utilizând un microfon. Propagarea oscilației electrice printr-un circuit electric se face cu viteza luminii (300000 km/s), iar propagarea sunetului prin aer are loc cu o viteză de aproape un milion de ori mai mică. Pornind de la aceste informații şi considerând că aveți la dispoziție sursa corespunzătoare de oscilații electrice, difuzorul, microfonul şi un osciloscop, imaginați o metodă practică prin care puteți determina experimental viteza sunetului.



3.3.4. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR PERPENDICULARE DE FRECVENȚE DIFERITE, FIGURILE *LISSAJOUS*

Fie oscilațiile perpendiculare, de frecvențe diferite :

$$x = A_1 \, sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$y = A_2 \, sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Să presupunem că un punct material participă simultan la cele două oscilații. Ne putem pune întrebarea : **în ce condiții traiectoria punctului material este închisă** (adică în ce situație mişcarea punctului material este periodică, repetându-se identic după intervale de timp bine stabilite) ? Mai întâi, să formulăm în limbaj matematic această întrebare :

Traiectoria este închisă dacă există un interval de timp T astfel încât coordonatele x şi y ale punctului material la momentul de timp t şi coordonatele la momentul de timp $t + T$ să aibă aceleaşi valori, oricare ar fi momentul de timp t.

$$\exists T \text{ aî } x(t+T) = x(t),\ y(t+T) = y(t),\ \forall t$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 167

Numele de „figuri Lissajous” provine de la numele unui fizician francez, relativ obscur, **Jules Lissajous** (1822 – 1880). Acesta a studiat compunerea oscilațiilor perpendiculare în perioada 1857 – 1858. Rezultatele lui Lissajous nu au fost însă obținute în premieră de acesta. Curbe similare au fost găsite încă din 1815 de matematicianul american **Nathaniel Bowditch**, motiv pentru care figurile Lissajous se mai numesc curbele Bowditch.

Cele două oscilații sunt periodice şi, prin urmare, intervalul de timp T nu poate fi decât un multiplu întreg al perioadelor oscilațiilor :

$$T = k_1 T_1 = k_1 \frac{2\pi}{\omega_1} \quad ; \quad k_1 \in \mathbf{N}$$

$$T = k_2 T_2 = k_2 \frac{2\pi}{\omega_2} \quad ; \quad k_2 \in \mathbf{N}$$

De aici, obținem :

$$k_1 \frac{2\pi}{\omega_1} = k_2 \frac{2\pi}{\omega_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k_2}{k_1} \quad ; \quad k_1, k_2 \in \mathbf{N}$$

Concluzia este că :

Traiectoria punctului material care participă simultan la două mişcări oscilatorii armonice, desfăşurate pe direcții perpendiculare, este închisă dacă raportul pulsațiilor celor două oscilații este un număr rațional.

Care este aspectul unei traiectorii închise? Pentru a răspunde la această întrebare să remarcăm mai întâi că sunt valabile relațiile :

$$-A_1 \le x \le A_1 \quad ; \quad -A_2 \le y \le A_2$$

Traiectoria este conținută în interiorul unui dreptunghi cu laturile $2A_1$, respectiv $2A_2$.

Prin eliminarea timpului între cele două ecuații de mişcare, obținem ecuația traiectoriei ca o funcție $y = y(x)$. Această funcție are extreme, corespunzătoare condiției :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Putem scrie şi :

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 168

Există posibilitatea ca raportul frecvențelor celor două oscilații perpendiculare să nu fie un număr rațional. De exemplu, acest raport ar putea fi egal cu $\sqrt{2}$. Cum vă imaginați că ar arăta traiectoria punctului material după trecerea unui număr foarte mare de perioade comune celor două oscilații ?

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(A_2\,sin(\omega_2 t+\varphi_2)\right)\left(A_1\,sin(\omega_1 t+\varphi_1)\right)}{d\left(A_1\,sin(\omega_1 t+\varphi_1)\right)}=\frac{\omega_2 A_2\,cos(\omega_2 t+\varphi_2)}{\omega_1 A_1\,cos(\omega_1 t+\varphi_1)}=0$$

Funcția trigonometrică de la numărător, $cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, se anulează de două ori în fiecare perioadă T_2. În intervalul de timp T, corespunzător parcurgerii traiectoriei închise, care cuprinde numărul întreg k_2 de perioade T_2, numărătorul se va anula de $2k_2$ ori. În concluzie, funcția $y = y(x)$ are $2k_2$ extreme, dintre care k_2 sunt maxime, iar k_2 sunt minime. În mod analog se poate arăta că funcția $x = x(y)$ are $2k_1$ extreme, dintre care k_1 sunt maxime, iar k_1 sunt minime. Semnificația acestor constatări în ceea ce priveşte reprezentarea grafică a traiectoriei este următoarea :

Graficul traiectoriei închise are numere de k_2 puncte de tangență la dreapta $y = A_2$, k_2 puncte de tangență la dreapta $y = -A_2$, k_1 puncte de tangență la dreapta $x = A_1$ şi k_1 puncte de tangență la dreapta $x = A_1$.

Aceste observații ne permit să trasăm graficul traiectoriei în coordonate x,y.

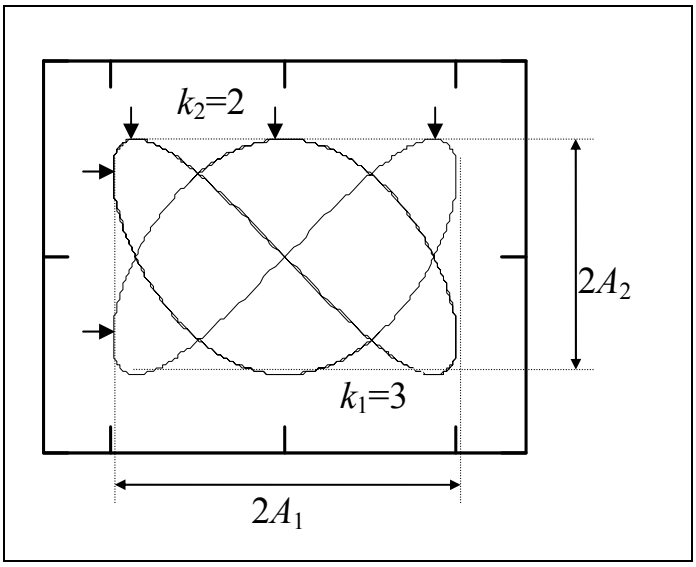


Figura alăturată este traiectoria punctului material care participă la oscilațiile :

$$x = A_1\,sin(2\omega t+\varphi_1)$$
$$y = A_2\,sin(3\omega t+\varphi_2)$$

Prin urmare :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{2}{3}=\frac{k_2}{k_1}\Rightarrow k_1=3;k_2=2$$

Studiind graficul, remarcăm că raportul numerelor de „creste” orizontale şi verticale este egal cu raportul k_2/k_1, respectiv egal cu raportul ω_1/ω_2.

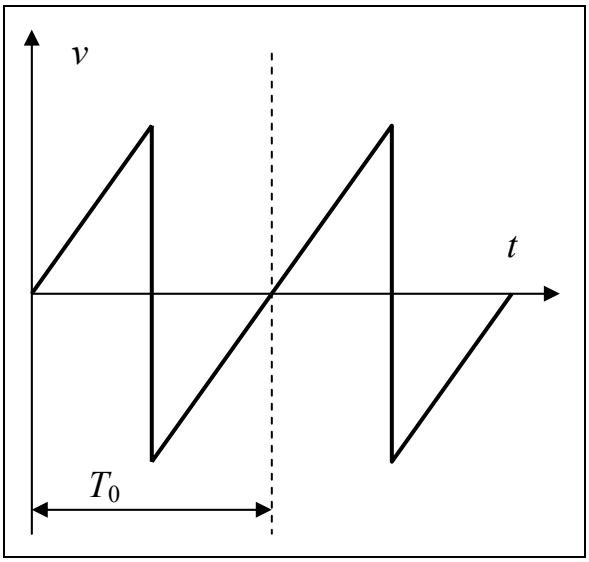
Concluzia este următoarea :

Dacă un punct material participă simultan la două oscilații armonice, pe direcții perpendiculare, iar raportul pulsațiilor oscilațiilor este un număr rațional, traiectoria punctului material este o curbă închisă, raportului numerelor de creste verticale şi orizontale fiind invers egal cu raportul pulsațiilor. Acest tip de traiectorie a primit numele de **figură Lissajous**.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 169

În epoca noastră, figurile Lissajous şi-au găsit aplicații în electronică. Astfel, ele pot fi vizualizate pe ecranul unui osciloscop şi pe baza formei lor permit calcularea frecvenței necunoscute a unui semnal armonic în funcție de frecvența cunoscută a unui semnal armonic etalon.

3.3.5. OSCILAȚII PERIODICE, SERII FOURIER



Să ne imaginăm că lăsăm să cadă o minge de ping-pong de la o înălțime oarecare pe o suprafață orizontală, elastică. Să neglijăm frecările cu aerul şi pierderile de energie în urma ciocnirii cu suprafața orizontală. În această situație, mingea va avea o mişcare alternativă de coborâre şi urcare. Graficul vitezei mingii în funcție de timp (prezentat în figura alăturată) relevă periodicitatea mişcării. Ceea ce este evident, examinând graficul, este că mingea are o mişcare periodică, dar nu şi o mişcare oscilatorie armonică. Problema pe care o întâmpină fizicienii (şi, implicit, matematicienii) într-o asemenea situație este modul în care ar putea fi modelată matematic legea după care viteza variază în funcție de timp. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) a fost acela care a oferit soluția problemei menționate anterior.

Conform studiului matematic al lui Fourier orice funcție periodică de timp poate fi descrisă ca o compunere de oscilații armonice ale căror perioade sunt submultipli întregi ai perioadei funcției în cauză :

$$x(t) = \sum_n x_n = \sum_n A_n \, sin\left[\frac{2\pi}{\frac{T_0}{n}} t + \varphi_n\right] \quad ; \quad n \in \mathbf{N}$$

Suma de mai sus reprezintă o serie (cu alte cuvinte, pentru ca reprezentarea să fie cât mai exactă întregul n trebuie să atingă valori foarte mari) numită şi **serie Fourier**. Seria Fourier mai poate fi calificată drept **descompunerea Fourier unei funcții periodice în oscilații armonice.**

BIOGRAFIA DE LA PAGINA 170

Fourier a fost fiul unui croitor. A avut un talent deosebit pentru matematică. S-a mai afirmat ca egiptolog şi conducător în administrația publică. Politic, a fost implicat în Revoluția franceză şi perioada domniei lui Napoleon I. A fost înnobilat, devenind baron. Principala sa lucrare ştiințifică aparține domeniului fizicii matematice, se numeşte „*Théorie analytique de la chaleur*” („*Teoria analitică a căldurii*”) şi a fost terminată în 1822.

Valorile amplitudinilor A_n se pot determina ştiind că funcţiile armonice alcătuiesc un sistem de funcţii ortonormate :

$$\begin{cases} \delta_{n,k} = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right) sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt \\ \delta_{n,k} = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} cos\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right) cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt \\ 0 = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_0^{T_0} sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right) cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt \end{cases}$$

unde $\delta_{n,k}$ este egal cu 0 dacă $n \neq m$ sau cu 1 dacă $n = m$.

Putem scrie :

$$x(t) sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right) = \sum_n A_n\, sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi_n\right) sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) =$$

$$= \sum_n A_n\, sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right) sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) cos\,\varphi_n + \sum_n A_n\, cos\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right) sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) sin\,\varphi_n$$

Integrând pe intervalul (0, T_0), obţinem :

$$\int_0^{T_0} x(t) sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt = \frac{T_0}{2}\sum_n A_n\, cos\,\varphi_n \delta_{nk} = \frac{T_0}{2} A_k\, cos\,\varphi_k$$

Analog :

$$\int_0^{T_0} x(t) cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt = \frac{T_0}{2}\sum_n A_n\, sin\,\varphi_n \delta_{nk} = \frac{T_0}{2} A_k\, sin\,\varphi_k$$

Rezultă că A_k are expresia :

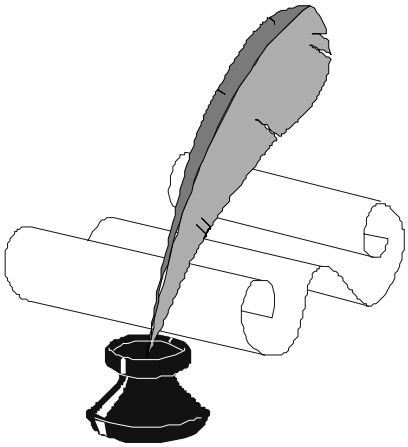
$$\boxed{A_n = \frac{2}{T_0}\sqrt{\left[\int_0^{T_0} x_{(t)}\, sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt\right]^2 + \left[\int_0^{T_0} x_{(t)}\, cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right) dt\right]^2}}$$

PRECIZAREA DE LA PAGINA 171

Funcţiile ortonormate (asemănător cu vectorii care constituie o bază de vectori ortonormaţi – cea mai „populară” bază fiind aceea constituită de versorii celor trei dimensiuni spaţiale : **i**, **j**, **k**) permit exprimarea unei funcţii oarecare sub forma unei combinaţii liniare a funcţiilor ortonormate, luate cu anumite ponderi. Bazele de funcţii ortonormate sunt extrem de importante în mecanica cuantică, unde probabilitatea de a întâlni o anumită stare a sistemului fizic cuantic depinde de ponderea pe care o are funcţia ortonormată în combinaţia liniară a acestora.

iar φ_k poate fi calculat conform relației :

$$tg\ \varphi_k = \frac{\int_0^{T_0} x(t) cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt}{\int_0^{T_0} x(t) sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}t\right)dt}$$



În cazul concret expus la începutul acestui subcapitol, funcția periodică de timp este :

$$\begin{cases} v(t) = gt & ; \quad t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right] \\ v(t) = g(t - T_0) & ; \quad t \in \left[\frac{T_0}{2}, T_0\right] \end{cases}$$

Calculul amplitudinilor A_k şi fazelor φ_k decurge după cum urmează :

$$\int_0^{T_0} v(t) sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt = \int_0^{\frac{T_0}{2}} gt\, sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} g(t - T_0) sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt =$$

$$= g\int_0^{T_0} t\, sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt - gT_0\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt =$$

$$= -\frac{T_0}{2k\pi} gt\, cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)\Bigg|_0^{T_0} + \frac{T_0}{2k\pi} g \underbrace{\int_0^{T_0} cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt}_{0} + gT_0\frac{T_0}{2k\pi} cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)\Bigg|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} =$$

$$= -\frac{gT_0^2}{2k\pi} + \frac{gT_0^2}{2k\pi}\left[1 - (-1)^k\right] = -\frac{(-1)^k gT_0^2}{2k\pi}$$

PRECIZAREA DE LA PAGINA 172

În orice serie Fourier, primul termen corespunde valorii $n = 0$ şi este o constantă care nu depinde de timp. Ne-am permis ca în subcapitolul de față să nu vorbim despre acest termen deoarece contribuția sa este nulă : $\int_0^{T_0} v(t)\cdot ct.dt = ct.\cdot\left[\int_0^{T_0} gt\, dt - gT_0\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} dt\right] = ct.\cdot\left(\frac{gT_0^2}{2} - \frac{gT_0^2}{2}\right) = 0$

$$\int_0^{T_0} v(t)cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt = \int_0^{\frac{T_0}{2}} gt\,cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt + \int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} g(t-T_0)cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt =$$

$$= g\int_0^{T_0} t\,cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt - gT_0\int_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} cos\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt =$$

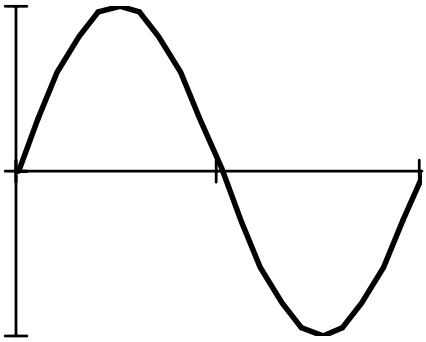
$$= \frac{T_0}{2k\pi}gt\,sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)\Bigg|_0^{T_0} - \frac{T_0}{2k\pi}g\underbrace{\int_0^{T_0} sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)dt}_{0} - gT_0\frac{T_0}{2k\pi}sin\left(k\frac{2\pi}{T_0}\right)\Bigg|_{\frac{T_0}{2}}^{T_0} = 0$$

De aici rezultă :

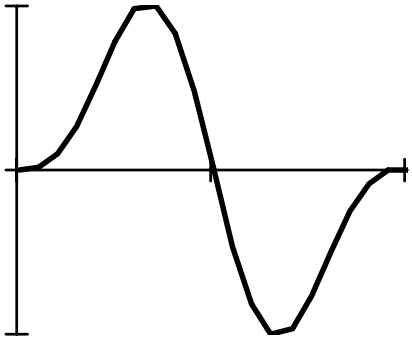
$$sin\,\varphi_k = 0 \quad ; \quad cos\,\varphi_k = -(-1)^k \quad ; \quad A_k = \frac{2}{T_0}\frac{gT_0^2}{2k\pi} = \frac{gT_0}{k\pi}$$

Aceste rezultate arată că seria Fourier pe care o căutăm este :

$$v(t) = \frac{gT_0}{\pi}\sum_n -\frac{(-1)^n}{n}sin\left(n\frac{2\pi}{T_0}t\right) = \frac{gT_0}{\pi}\left[sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) - \frac{1}{2}sin\left(2\frac{2\pi}{T_0}t\right) + \frac{1}{3}sin\left(3\frac{2\pi}{T_0}t\right) - ...\right]$$

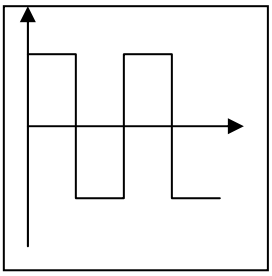


Prima aproximatie

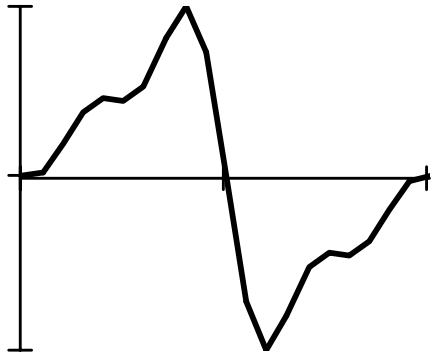


A doua aproximatie

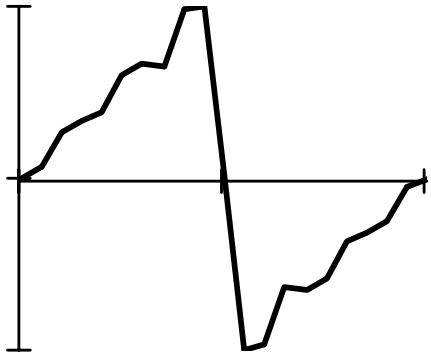
PROBLEMA DE LA PAGINA 173



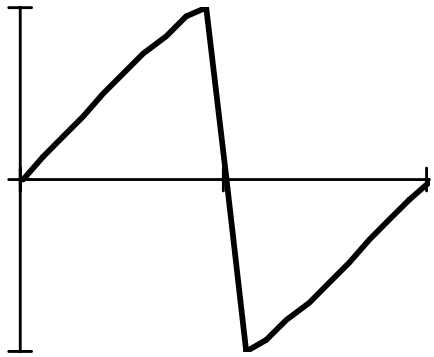
Calculați termenii seriei Fourier care reprezintă funcția – treaptă prezentată în graficul alăturat.



A patra aproximatie

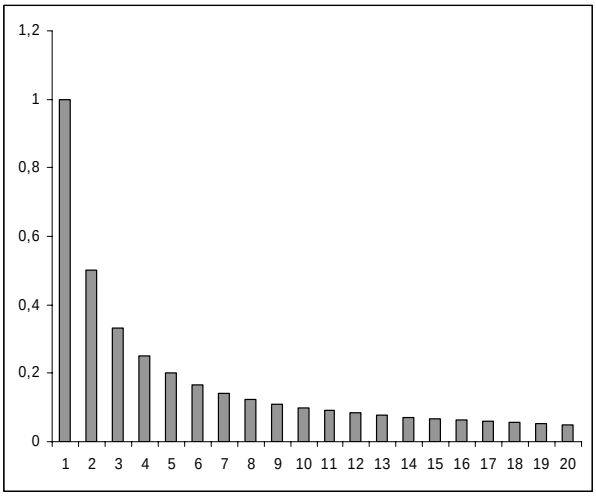


A sasea aproximatie



A 20-a aproximatie

Graficele alăturate reprezintă suma Fourier compusă din 1, 2, 4, 6, respectiv 20 de termeni. Se observă că încă de la a patra aproximație suma Fourier reprezintă (e adevărat, destul de grosolan) funcția $v(t)$. Suma cu 20 de termeni se identifică aproape perfect cu funcția $v(t)$. De aceea, în practică, descompunerea Fourier a unei funcții periodice nu necesită neapărat sumarea unui număr infinit de termeni, ci doar a unui număr convenabil ales în limita erorilor care pot fi permise.



Se obişnuieşte ca frecvențele oscilațiilor şi ponderile lor în suma Fourier să fie prezentate sub forma unei histograme, numită **spectrul de frecvențe** asociat funcției periodice reprezentată prin serie Fourier. În figura alăturată puteți vedea spectrul de frecvențe asociat cu funcția $v(t)$ pe care am luat-o ca exemplu de calcul în cadrul acestui subcapitol.

PROBLEMA DE LA PAGINA 174

Care este spectrul de frecvențe asociat problemei expuse în caseta din pagina precedentă ?

4. UNDE

4.1. INTRODUCERE

Nu ştiu cât de clară este fotografia pe care am ales-o pentru a prefața această secțiune a cărții. Sper că se pot distinge câțiva pescăruşi zburând deasupra oceanului brăzdat de valuri. Dacă o priviți cu ochii unui fizician, s-ar putea ca ea să vă determine să reflectați adânc, pentru că reuneşte două elemente aparent contrarii, unificate totuşi de o trăsătură comună. Trăsătura comună este mişcarea, obiectul de studiu al mecanicii, dar în ce constă diferența ? Evoluția pescăruşilor o putem încadra în cele discutate până acum : ei ocupă poziții bine determinate în spațiu, se deplasează cu

VERSUL DE LA PAGINA 175

Ce e val, ca valul trece …

Mihai Eminescu (1850 – 1889)

anumite viteze sau accelerații, pot fi la nevoie aproximați ca simple puncte materiale, etc. Dar oceanul ? În ochii noştri el este aici şi peste tot. În timp, rămâne pe loc, dar totuşi valurile par să-l ducă spre țărm. Ce legi ar putea să-i descrie valurile, mişcarea lor leneşă, aproape hipnotică prin repetabilitate, forma lor geometrică, repartizarea lor pe suprafața oceanului ? Ei bine, aceste întrebări sunt motivul pentru care fizicianul este împins către reflexie şi către nevoia de a studia mai temeinic ceea ce în fizică a primit denumirea de **unde**, respectiv **fenomene ondulatorii**. Să începem, deci, să ne formăm un vocabular adecvat şi să definim mărimile fizice de care ne vom folosi în continuare.

Într-un mediu elastic, se pot produce uneori perturbații. Datorită elasticității mediului, perturbațiile se pot transmite punctelor vecine, propagându-se astfel în interiorul mediului elastic.

Prin definiție, propagarea unei perturbații într-un mediu elastic se numeşte **undă mecanică elastică**.

O caracteristică foarte importantă a undelor elastice este aceea că propagarea perturbației prin mediul elastic se face cu viteză finită şi din aproape în aproape. De asemenea, undele elastice nu transportă substanță (adică nu au loc transferuri de materie în interiorul mediului elastic). Totuşi, undele elastice transportă energie şi impuls.

Diferența dintre valoarea pe care o are o mărime fizică ce caracterizează mediul elastic în prezența undei elastice şi valoarea de echilibru a respectivei mărimi fizice se numeşte în general **funcție de undă** şi se notează cu Ψ.

Funcțiile de undă pot fi atât mărimi fizice scalare, cât şi mărimi fizice vectoriale, iar din punct de vedere matematic ele sunt funcții de momentul de timp şi de raza vectoare a punctului pe care îl reprezintă în interiorul mediului :

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}, t)$$

PRECIZAREA DE LA PAGINA 176

Termenul de **perturbație** se referă la micile variații ale valorilor unor mărimi fizice care caracterizează interiorul mediului elastic, pe care acestea le pot avea față de valorile corespunzătoare stării de echilibru. Exemple de asemenea mărimi fizice pot fi: deplasarea unei porțiuni a mediului, viteza sa de deplasare, energia cinetică dobândită, ca şi multe altele. Oricare dintre abaterile valorilor acestor mărimi fizice față de starea de echilibru poate fi socotită ca o măsură a modificărilor induse în prezența undei elastice.

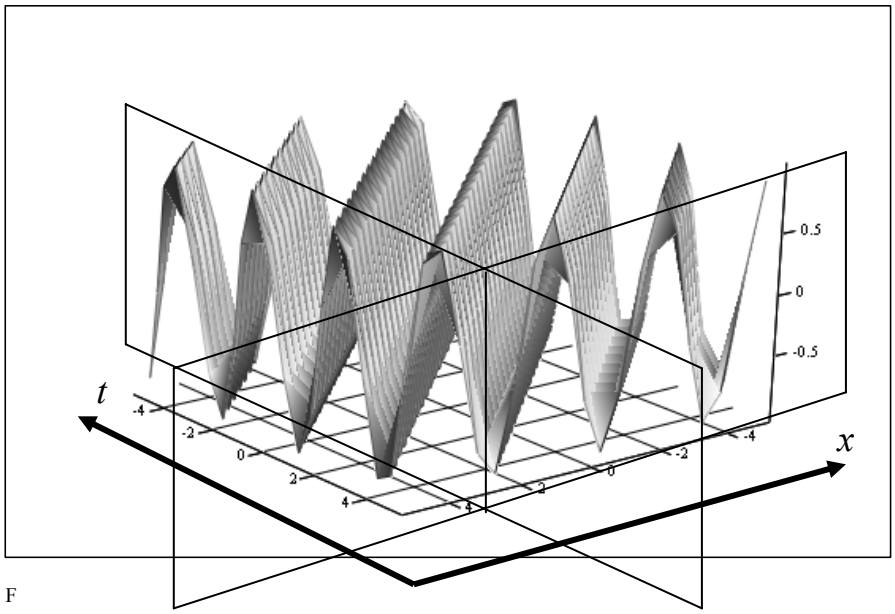
4.2. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A UNDELOR, SOLUȚII PARTICULARE

4.2.1. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A UNDELOR

Ne putem pune întrebarea :

ESTE OARE POSIBIL CA ŞTIIND STAREA DE PERTURBARE LA UN ANUMIT MOMENT DE TIMP ŞI ÎNTR-UN ANUMIT PUNCT AL MEDIULUI ELASTIC, PRECUM ŞI CARACTERISTICILE MEDIULUI, SĂ PUTEM CALCULA CARE VA FI STAREA DE PERTURBARE ÎNTR-UN ALT PUNCT ŞI LA ALT MOMENT DE TIMP ?

CU ALTE CUVINTE, EXISTĂ O ECUAȚIE MATEMATICĂ CARE SĂ DESCRIE PROPAGAREA PERTURBAȚIEI ÎN INTERIORUL MEDIULUI ELASTIC ?



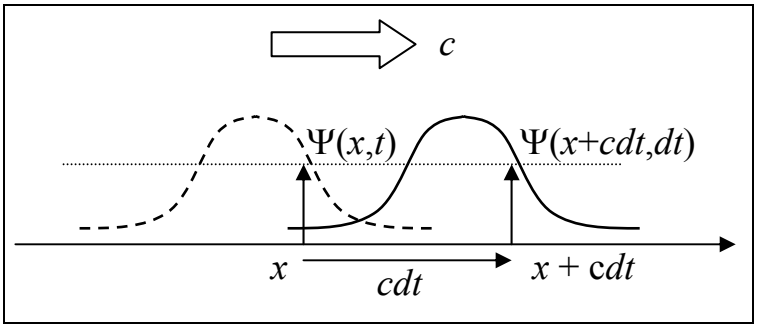
F

Pentru a răspunde acestei întrebări, să începem prin a examina situația din schița alăturată. Să luăm ca exemplu propagarea unor valuri în largul mării. Există o dublă periodicitate : temporală şi spațială. Astfel, într-un punct dat are loc o oscilație pe verticală (imaginați-vă plutitorul unei undițe sau mişcarea unei geamanduri), iar la un mo-

PRECIZAREA DE LA PAGINA 177

Mediul elastic este mediul format din particule care interacționează între ele prin forțe de tip elastic. Spre deosebire de un mediu plastic, mediul elastic are tendința de a reveni la forma inițială după ce, deformat fiind de o forță exterioară, este lăsat liber.

ment dat pe suprafața mării crestele şi adânciturile valurilor sunt repartizate după un model repetitiv.



Să presupunem acum că valurile se propagă cu viteza constantă c, fără ca aspectul lor să se modifice. În consecință, după trecerea unui interval de timp dt, valoarea funcției de undă corespunzătoare punctului de coordonată x va fi regăsită în punctul de coordonată $x + cdt$. Putem scrie :

$$\Psi(x,t) = \Psi(x + cdt, t + dt)$$

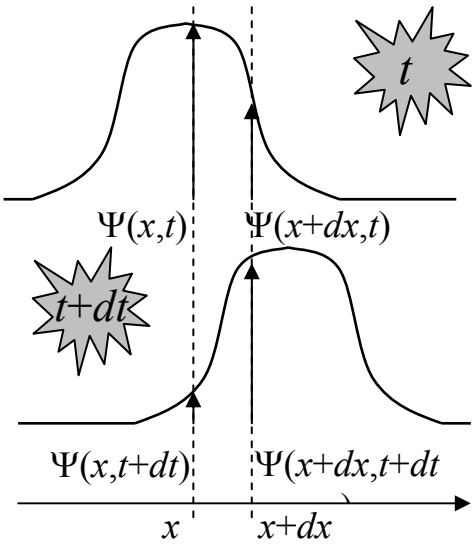
Prin dezvoltarea în serie *Taylor* şi considerând că intervalul de timp dt este suficient de mic pentru ca termenii de ordin superior să poată fi neglijați, rezultă :

$$\Psi(x + dx, t + dt) = \Psi(x,t) + \left.\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}\right|_{x,t} cdt + \left.\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}\right|_{x,t} dt + 0\left(dt^2\right)$$

sau :

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

✍ În concluzie, derivatele de ordinul întâi ale funcției de undă în raport cu coordonata sau cu momentul de timp sunt proporționale.



Să ne imaginăm în continuare că dispunem două „fotografii” ale unui val, luate la momente de timp foarte apropiate: t şi $t + dt$, pe care le-am aşezat una sub cealaltă (vezi figura alăturată). Putem găsi legătura între $\Psi(x + dx, t + dt)$ şi $\Psi(x, t)$ pe două căi diferite :

❖ Mai întâi stabilim legătura dintre $\Psi(x + dx, t + dt)$ şi $\Psi(x + dx, t)$:

$$\Psi(x + dx, t + dt) \cong \Psi(x + dx, t) + \left.\frac{\partial \Psi(x + dx, t)}{\partial t}\right|_{x+dx,t} dt$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 178

Fiind dată o funcție $f(x)$ şi două valori x, respectiv x_0 ale argumentului său, dezvoltarea în serie Taylor permite calcularea valorii în x cunoscând valoarea funcției şi tuturor derivatelor ei în x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left.\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \ldots$$

Dacă $(x - x_0)$ este suficient de mic, termenii de ordin superior ai dezvoltării se pot neglija. Detalii despre seria Taylor, la cursul de matematică.

şi apoi, utilizând relațiile :

$$\Psi(x+dx,t) \cong \Psi(x,t) + \left.\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}\right|_{x,t} dx$$

$$\frac{\partial \Psi(x+dx,t)}{\partial t} \cong \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} + \left.\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x \partial t}\right|_{x,t} dx$$

stabilim relația cu $\Psi(x, t)$:

$$\Psi(x+dx,t+dt) \cong \Psi(x,t) + \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} dt + \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x \partial t} dtdx$$

❖ Mai întâi stabilim legătura dintre $\Psi(x + dx, t + dt)$ şi $\Psi(x, t + dt)$:

$$\Psi(x+dx,t+dt) \cong \Psi(x,t+dt) + \left.\frac{\partial \Psi(x,t+dt)}{\partial x}\right|_{x,t+dt} dx$$

şi apoi utilizând relațiile :

$$\Psi(x,t+dt) \cong \Psi(x,t) + \left.\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}\right|_{x,t} dt$$

$$\frac{\partial \Psi(x,t+dt)}{\partial x} \cong \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} + \left.\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t \partial x}\right|_{x,t} dt$$

stabilim relația cu $\Psi(x, t)$:

$$\Psi(x+dx,t+dt) \cong \Psi(x,t) + \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} dt + \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t \partial x} dxdt$$

❖ Egalând expresiile obținute şi reducând termenii egali, rezultă :

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t \partial x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$$

Dacă ținem cont de relația obținută anterior între derivatele de ordinul întâi în raport cu coordonata sau cu timpul, rezultă :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-c\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) \quad \Leftrightarrow \quad c\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

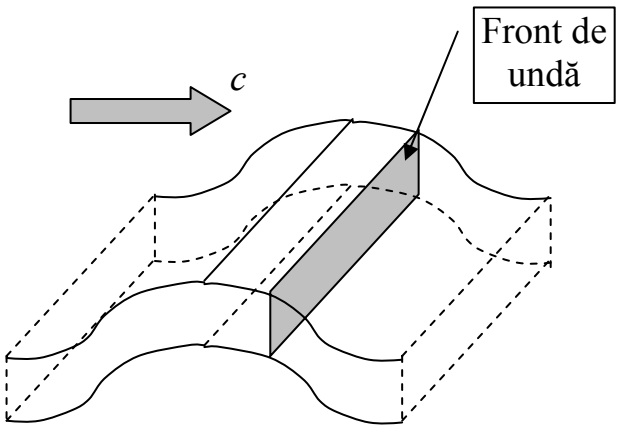
BIOGRAFIA DE LA PAGINA 179

Brook Taylor (1685 – 1731). În 1708, Taylor obține soluția problemei centrului de oscilație (prioritatea acestui rezultat a fost motivul unui conflict cu matematicianul elvețian Johann Bernoulli). Este întemeietorul calculului cu diferențe finite. Pe baza acestuia, a exprimat matematic mişcarea unei coarde vibrante folosind principiile mecanicii. În cartea „*Methodus incrementorum directa et inversa*” (1715) expune pentru prima oară teorema care-i poartă astăzi numele.

sau :

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0}$$

Această ecuație se numește **ecuația diferențială a undelor plane** și reprezintă cea mai generală relație matematică care descrie propagarea unei unde elastice plane.



Locul geometric al punctelor din spațiu care sunt caracterizate de aceeași stare de perturbație se numește **front de undă** sau **suprafață de undă**. În cazul undelor plane, frontul de undă este un plan perpendicular pe direcția de propagare a undei.

Generalizarea în trei dimensiuni spațiale a acestei ecuații :

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0}$$

se numeşte **ecuația diferențială a undelor** şi poate reprezenta matematic orice proces ondulatoriu.

Utilizând operatorul lui Laplace :

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ecuația diferențială a undelor se scrie sub o formă simplificată :

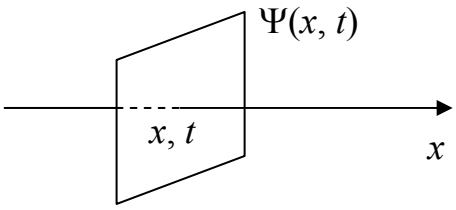
$$\boxed{\nabla^2\Psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0}$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 180

Undele se pot clasifica în funcție de forma frontului de undă. Astfel, putem întâlni :

- **Unde plane**, ale căror front de undă este o suprafață plană
- **Unde cilindrice**, ale căror front de undă este o suprafață cilindrică
- **Unde sferice**, ale căror front de undă este o suprafață sferică

4.2.2. SOLUȚIA GENERALĂ A ECUAȚIEI UNDEI PLANE



Să considerăm o undă elastică plană care se propagă în lungul axei *Ox* cu viteza *c*. Frontul de undă este perpendicular pe direcția de propagare a undei, iar în toate punctele sale funcția de undă Ψ are aceeaşi valoare. Prin urmare, funcția de undă nu depinde de coordonatele *y* şi *z* :

$$\Psi = \Psi((x, t)$$

Pentru că derivatele parțiale ale funcției de undă în raport cu coordonatele *y* şi *z* sunt nule, din ecuația diferențială a undelor rezultă :

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Soluția generală a acestei ecuații se poate obține astfel :

❖ se face schimbarea de variabile :

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}$$

astfel încât :

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{d(x+ct)}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{d(x+ct)}{\partial t} = c$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{d(x-ct)}{\partial x} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{d(x-ct)}{\partial t} = -c$$

❖ se calculează derivatele :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\Psi}{\partial\eta}$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 181

Undele pot fi clasificate şi în funcție de direcția pe care au loc perturbațiile. Astfel, dacă **deformările induse de perturbație au direcție paralelă cu direcția de propagare a undei**, unda se numeşte **undă longitudinală**. Dacă **deformările induse de perturbație au direcție perpendiculară pe direcția de propagare a undei**, unda se numeşte **undă transversală**.

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}$$

şi :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}=c\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}-c\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(c\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}-c\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)=c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\right)-c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)=c\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)-c\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)=$$

$$=c\frac{\partial}{\partial\xi}\left(c\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}-c\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)-c\frac{\partial}{\partial\eta}\left(c\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}-c\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)=c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}-2c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\partial\eta}+c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}$$

❖ Se înlocuiesc derivatele de ordinul al doilea în ecuaţia undei plane :

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}=0$$

rezultând :

$$4\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

Putem scrie :

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)=0$$

Deoarece derivata parţială în raport cu ξ este nulă, termenul $\partial\Psi/\partial\eta$ nu poate reprezenta decât o constantă în raport cu ξ, fiind cel mult o funcţie de variabila η :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}=f'(\eta)=\frac{df(\eta)}{d\eta}$$

Prin integrarea acestei ecuaţii, obţinem :

$$\Psi=f(\eta)+const.$$

CUGETAREA DE LA PAGINA 182

Mecanica este raiul ştiinţelor matematice, pentru că prin mijlocirea ei se ajunge la roadele matematicilor.

Leonardo da Vinci (1452–1519),
om de artă italian, inginer şi inventator

Constanta de integrare este de fapt constantă în raport cu variabila η, deci poate totuşi reprezenta o funcție de variabila ξ :

$$\Psi = f(\eta) + g(\xi)$$

Revenind la variabilele inițiale, obținem :

$$\boxed{\Psi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)}$$

Soluția generală a ecuației undei plane

Concluzia este că soluția generală a ecuației undelor plane este o sumă de două funcții arbitrare, care depind de variabilele *x* - *ct*, şi respectiv *x* + *ct*. Aceste două variabile se numesc faze.

Să considerăm acum unda plană reprezentată de ecuația :

$$\Psi(x,t) = f(x-ct)$$

Faza undei este Φ = *x* - *ct*. Să presupunem că luăm în considerare un moment de timp ulterior *t*' şi un alt punct din spațiu *x*', cu condiția ca faza să nu-şi modifice valoarea Φ = *x*'- *ct*'. Fazele fiind egale, funcțiile de undă corespunzătoare sunt de asemenea egale. Rezultă de aici că suprafața de undă care trece prin punctele de coordonată *x* la momentul *t* este identică cu suprafața de undă care trece prin punctele de coordonată *x*' la momentul *t*'. Acest fapt este rezultatul propagării undei în lungul axei *Ox*. Putem scrie

$$x' - ct' = x - ct \quad \Rightarrow \quad x' - x = c(t' - t) \quad \Rightarrow \quad \Delta x = c\Delta t \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Această relație ne permite să găsim semnificația fizică a parametrului *c* :

Parametrul *c* reprezintă viteza cu care se propagă o suprafață de undă în lungul axei *Ox*, adică chiar viteza de propagare a undei. Pentru că suprafața de undă este caracterizată prin valoarea fazei sale, viteza *c* se numeşte **viteză de fază**. În cazul discutat, viteza de fază este pozitivă, ceea ce semnifică că unda plană se propagă în sensul pozitiv al axei *Ox*.

PROBLEMA DE LA PAGINA 183

Arătați că o funcție *F*(*f*(η)) verifică şi ea ecuația undelor plane. Verificați în particular cazurile :

$$F = \frac{1 \pm f^2(\eta)}{2}$$

Rezultă de aici că :

✍ Unda plană caracterizată de faza $\Phi = x - ct$ se propagă în sensul pozitiv al axei *Ox*, numindu-se **undă progresivă**.

Analog se poate arăta că :

✍ Unda plană caracterizată de faza $\Phi = x + ct$ se propagă în sensul negativ al axei *Ox*, numindu-se **undă regresivă**.

✍ În practică, unda regresivă şi unda progresivă pot fi întâlnite separat sau simultan (de exemplu, al doilea caz apare când sunetul incident la o suprafață se întâlneşte cu sunetul reflectat de suprafață).

Un caz particular de undă plană progresivă este **unda plană armonică** :

$$\boxed{\Psi(x,t) = A\,sin\left[\varphi_0 - \frac{\omega}{c}(x - ct)\right] = A\,sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]}$$

unde *A* este **amplitudinea**, *T* este **perioada**, ω este **pulsația**, λ este **lungimea de undă** (adică distanța pe care se propagă unda în timp de o perioadă) iar φ_0 este **faza inițială**.

✍ Într-un punct de coordonată *x*, unda plană armonică determină în timp o oscilație armonică în jurul poziției de echilibru.

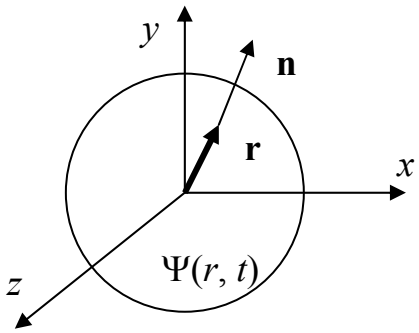
✍ Importanța undelor plane armonice este aceea că o undă plană oarecare poate fi descrisă matematic prin serii sau integrale Fourier, ca o simplă suprapunere de unde plane armonice.

PROBLEMA DE LA PAGINA 184

Demonstrați matematic că la acelaşi moment de timp *t* funcția de undă are valori egale în punctele de coordonate :

$$x_n = x_0 + n\lambda \quad ; \quad n \in \mathbf{N}$$

4.2.3. SOLUȚIA ECUAȚIEI UNDELOR SFERICE



Undele sferice sunt undele ale căror suprafață de undă este o sferă centrată în jurul punctului în care s-a produs perturbația care a generat unda.

Toate punctele suprafeței de undă sferice se găsesc în aceeași stare de perturbare şi, deci, funcția de undă depinde doar de modulul razei vectoare, dar nu şi de orientarea acesteia.

Concluzia este că funcția de undă caracteristică unei unde sferice este o funcție doar de modulul razei vectoare şi momentul de timp :

$$\Psi = \Psi(r, t)$$

Pentru a găsi formula matematică generală corespunzătoare undelor sferice procedăm astfel :

❖ observăm că :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

dar :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

deci :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 185

Reprezentarea trigonometrică a numerelor complexe este :

$$z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \rho e^{i\alpha}\ ,\ z^* = \rho(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \rho e^{-i\alpha}$$

Prin urmare, unda armonică $\Psi = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ se mai poate scrie sub forma : $\Psi = \mathrm{Re}\,\mathbf{\Psi} = \mathrm{Re}\, Ae^{i\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)}$

❖ Calculăm derivata a doua în raport cu x :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{x}{r}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x}$$

sau :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{x^2}{r^3}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}$$

❖ Analog :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{y^2}{r^3}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{z^2}{r^3}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}$$

❖ Substituind aceste derivate în ecuația generală a undelor :

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0$$

obținem :

$$\frac{3}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0$$

sau :

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0}$$

Ecuația diferențială a undelor sferice

❖ Facem schimbarea de funcție :

$$\Psi(r,t)=\frac{1}{r}\psi(r,t)$$

astfel încât :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\psi\right)=-\frac{1}{r^2}\psi+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 186

Avantajul folosirii unei funcții de undă complexe **Ψ** este acela că în cazul undelor armonice, formal, cele două variabile x şi t pot fi separate, funcția de undă fiind un produs a două funcții : una de timp şi cealaltă de poziție :

$$\mathbf{\Psi}=Ae^{\frac{2\pi}{T}t}\,e^{-\frac{2\pi}{\lambda}x}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r^2}\psi+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=\frac{2}{r^3}\psi-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=\frac{2}{r^3}\psi-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$

Rezultă :

$$\frac{2}{r^3}\psi-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\left(-\frac{1}{r^2}\psi+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$$

sau :

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0}$$

❖ Soluția ultimei ecuații este :

$$\psi(r,t)=f(r-ct)+g(r+ct)$$

astfel încât în final obținem :

$$\boxed{\Psi(r,t)=\frac{1}{r}\left(f(r-ct)+g(r+ct)\right)}$$

Soluția generală a ecuației undelor sferice

Un caz particular este :

$$\boxed{\Psi(r,t)=\frac{A}{r}sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]}$$

care reprezintă **unda sferică armonică progresivă** (sau **divergentă**).

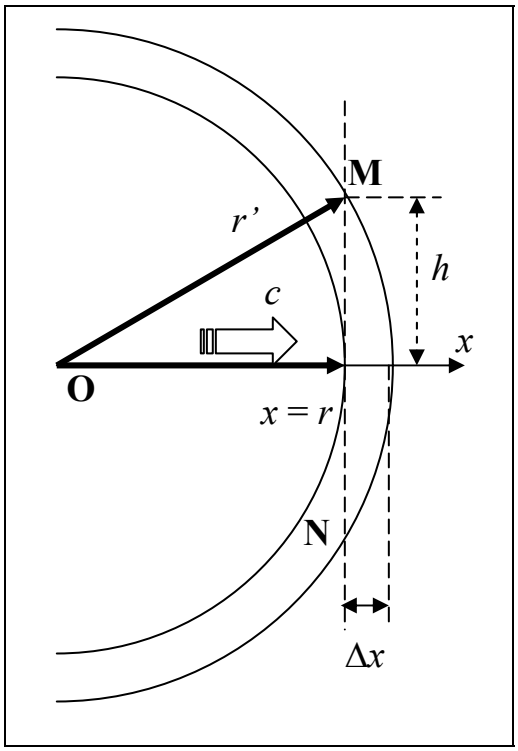
Se poate remarca faptul că, spre deosebire de amplitudinea undelor plane, amplitudinea undelor sferice scade invers proporțional cu distanța până la sursa de oscilații. Această proprietate este o consecință a principiului conservării energiei (energia transferată de undă îşi păstrează o valoare constantă indiferent de mărimea suprafeței de undă).

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 187

Funcția de undă complexă **Ψ** prezentată la pagina anterioară este soluția ecuației undelor plane (numită **soluția staționară**) dacă rezolvarea se face considerând că $\Psi(x, t) = F(t)\cdot G(x)$. Se poate arăta cu uşurință că în acest caz ecuația are forma :

$$\frac{\ddot{F}}{F}=\frac{1}{c^2}\frac{G''}{G}=-\omega^2 \quad ; \quad \omega^2=const\in\mathbf{R}_+$$

4.2.4. COMPORTAREA UNDELOR SFERICE LA DISTANȚĂ MARE DE SURSĂ



Să considerăm o undă sferică armonică :

$$\Psi(r,t)=\frac{A}{r}sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$$

Să presupunem de asemenea că unda se propagă între punctele $x = r$ şi $x' = r'$ aflate pe axa Ox şi că $r \cong r' \Leftrightarrow \Delta x << r$. Să discutăm despre valoarea funcției de undă în punctele din planul **MN**, perpendicular pe direcția de propagare, aflate față de sursă la distanțe cuprinse între r şi r'. În aceste puncte amplitudinea undei sferice variază între A/r şi A/r'. Deoarece $r \cong r'$, rezultă că :

$$A(x)=A(r)=\frac{A}{r}\cong\frac{A}{r'}=A(r')=A(x')$$

Prin urmare, în punctele de coordonate $x = r$ şi $x'= r'$ funcția de undă are expresiile :

$$\Psi(x)=A(x)sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi_0\right] \quad ; \quad \Psi(x')\cong A(x)sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x'}{\lambda}\right)+\varphi_0\right]$$

Remarcăm că valoarea (practic) constantă a amplitudinii este caracteristică unei unde plane. Deci, la propagarea între x şi x', unda sferică se comportă ca o undă plană. Acest comportament este valabil în toate punctele aflate față de sursă la distanțe cuprinse între r şi r' şi care aparțin planului **MN**. Cât de mare este întinderea acestei porțiuni din planul **MN** față de distanța Δx ? Există relația :

$$r'^2=r^2+h^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x'-x)(x'+x)=h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2\cong 2x\Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{\Delta x}=\sqrt{\frac{2x}{\Delta x}}>>1$$

Semnificația acestei relații este aceea că **pe distanțe mici în comparație cu distanța până la sursă** (sau, cu alte cuvinte, la distanță mare de sursă**) unda sferică se comportă ca o undă plană** al cărei front de undă este perpendicular pe direcția de propagare.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 188

Noțiunea de distanță mică sau mare este relativă, fără termen de comparație. În cazul undelor, termenul de comparație este o lungime asociată procesului ondulatoriu, şi anume lungimea de undă. „Distanță mare” față de sursă înseamnă o distanță mult mai mare decât lungimea de undă.

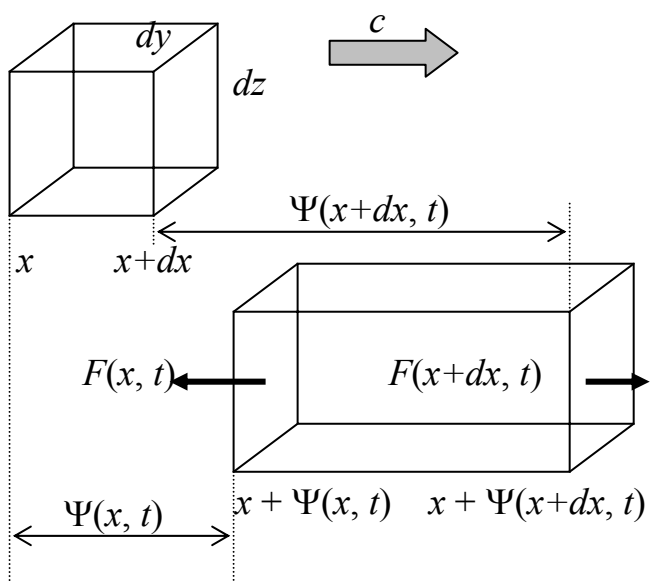
4.3. UNDE ELASTICE LONGITUDINALE

✍ Undele longitudinale se caracterizează prin aceea că direcția de propagare coincide cu direcția în care se produc deformările mediului elastic.

Să examinăm în continuare propagarea unei unde longitudinale într-un mediu elastic.

Sub acțiunea undei, starea unui element de volum dV al materialului se modifică. Efectele produse sunt de două tipuri :

- **Deplasarea elementului de volum**
- **Deformarea (alungirea sau comprimarea) elementului de volum**



Vom nota deplasarea capătului din stânga cu $\Psi(x, t)$, iar deplasarea capătului din dreapta cu $\Psi(x+dx, t)$. Expresiile acestor deplasări vor fi considerate în continuare ca fiind tocmai funcția de undă care caracterizează propagarea undei longitudinale. Deplasarea se face în timp, astfel încât derivata întâia a deplasării în raport cu timpul reprezintă viteza de deplasare :

$$v = \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

Accelerația elementului de volum este

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

PRECIZAREA DE LA PAGINA 189

Demonstrația pe care o facem aici este valabilă în special pentru cazul mediilor solide, nelimitate ca întindere. În cazul fluidelor, şi în special în cazul gazelor care sunt extrem de compresibile, la frecvențe de oscilație mari, pot interveni fenomene suplimentare care să afecteze precizia calculului.

Principiul fundamental al dinamicii ne spune că accelerația elementului de volum este rezultatul acțiunii forțelor externe, adică al forțelor elastice cu care mediul acționează asupra elementului de volum.

Notând masa elementului de volum cu *dm*, putem scrie :

$$dm\,a = F(x+dx,t) - F(x,t)$$

Cum :

$$dm = \rho dV = \rho dxdydz$$

unde ρ este densitatea materialului, prin dezvoltare în serie Taylor şi neglijarea factorilor de ordin superior :

$$F(x+dx,t) = F(x,t) + \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2}dx^2 + ... \cong F(x,t) + \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dx$$

rezultă :

$$\boxed{\rho\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}dydz = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}}$$

Să ne ocupăm acum de deformarea elementului de volum. Lungimea sa în starea neperturbată este *dx*. În stare perturbată, lungimea elementului de volum este egală cu diferența între coordonata capătului din dreapta şi coordonata capătului din stânga :

$$dx' = [x + dx + \Psi(x+dx,t)] - [x + \Psi(x,t)]$$
$$dx' = [x + dx + \Psi(x+dx,t)] - [x + \Psi(x,t)] = dx + \Psi(x+dx,t) - \Psi(x,t)$$

Recurgând din nou la dezvoltarea în serie Taylor şi neglijarea termenilor de ordin superior, rezultă :

$$dx' = dx + \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}dx$$

Alungirea elementului de volum este diferența dintre lungimea sa în stare perturbată şi lungimea în stare neperturbată :

$$\delta(dx) = dx' - dx = \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}dx$$

CUGETAREA DE LA PAGINA 190

Doar matematica şi logica matematică pot spune atât de puțin cât intenționează un fizician să spună.

Bertrand Russell (1872–1970),
filosof şi matematician englez

Conform legii lui Hooke, alungirea $\delta(dx)$ este proporțională cu forța de întindere $F(x, t)$ şi cu lungimea în stare nedeformată dx şi invers proporțională cu aria secțiunii transversale $dS = dydz$ şi cu modulul de elasticitate al materialului E

Înlocuind expresia deformării, rezultă :

$$\delta(dx) = \frac{F(x,t)dx}{E\,dydz}$$

sau :

$$\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} = \frac{F(x,t)}{E\,dydz}$$

sau :

$$\boxed{F(x,t) = E\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}dydz}$$

4.3.1. VITEZA DE PROPAGARE A UNDELOR ELASTICE LONGITUDINALE

Dispunem în acest moment de două expresii referitoare la forțele elastice cu care mediul acționează asupra elementului de volum :

$$F(x,t) = E\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}dydz$$

$$\rho\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}dydz = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$$

Derivând prima expresie în raport cu coordonata x, rezultă :

$$\frac{F(x,t)}{\partial x} = E\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}dydz$$

Substituind în expresia a doua, ne rămâne :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 191

Proprietățile elastice ale fluidelor sunt măsurate prin **coeficientul de compresibilitate** :

$$\beta = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$$

unde V este volumul, iar p este presiunea. Formal, modulul de elasticitate al unui fluid poate fi luat ca inversul coeficientului de compresibilitate.

$$\rho\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}=E\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

sau :

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}=0}$$

Comparând cu ecuația diferențială a undelor plane :

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}=0$$

observăm similaritatea celor două expresii şi tragem următoarele concluzii :

Perturbațiile care au loc în direcție longitudinală se propagă prin materialul elastic sub forma unei unde plane longitudinale.

Viteza de fază a undelor longitudinale are expresia :

$$\boxed{c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

unde E este modulul de elasticitate al mediului, iar ρ densitatea mediului. Remarcăm din această expresie că viteza de propagare este cu atât mai mare cu cât mediul este mai elastic şi are densitate mai mică.

4.3.2. DENSITATEA DE ENERGIE ÎN CAZUL UNDELOR LONGITUDINALE

Deplasarea elementului de volum cu viteza v implică faptul că acesta are o energie cinetică :

$$dW_c=\frac{dm\,v^2}{2}=\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\right)^2dxdydz=\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\right)^2dV$$

Cu definiția :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 192

Conform celor arătate la pagina precedentă, în cazul unui fluid, viteza de propagare a undelor longitudinale este :

$$c=\frac{1}{\sqrt{\beta\rho}}$$

Densitatea de energie cinetică reprezintă energia cinetică a unității de volum : $w_c = dW_c/dV$. Putem scrie :

$$\boxed{w_c = \frac{dW_c}{dV} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}\right)^2}$$

adică : densitatea de energie cinetică într-un mediu elastic în care se propagă o undă longitudinală este proporțională cu densitatea mediului şi cu pătratul primei derivate a funcției de undă (reprezentată prin deplasarea locală) în raport cu timpul.

Prin deformarea mediului elastic, în acesta se acumulează şi energie potențială. Revenind la legea lui Hooke aplicată elementului de volum :

$$F(x,t) = \frac{E\,dydz}{dx}\delta(dx) = k\delta(dx)$$

observăm că forța deformatoare este de tip elastic. Energia potențială asociată unei asemenea forțe are expresia :

$$dW_p = \frac{k[\delta(dx)]^2}{2}$$

Prin urmare, obținem :

$$dW_p = \frac{1}{2}\frac{E\,dydz}{dx}\left[\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}dx\right]^2 = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdydz = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right)^2 dV$$

Densitatea de energie potențială reprezintă energia potențială a unității de volum : $w_p = dW_p/dV$. Putem scrie :

$$\boxed{w_p = \frac{dW_p}{dV} = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}\right)^2}$$

adică : densitatea de energie potențială într-un mediu elastic în care se propagă o undă longitudinală este proporțională cu modulul de elasticitate al mediului şi cu pătratul primei derivate a funcției de undă în raport cu coordonata pe axa paralelă cu direcția de propagare a undei.

PROBLEMA DE LA PAGINA 193

Arătați că expresiile densităților de energie cinetică sau energie potențială pot fi luate ca funcții de undă şi verifică ecuația undelor plane.

După cum am demonstrat anterior, funcția de undă care verifică ecuația diferențială a undelor plane este o funcție oarecare de faza $\Phi = x - ct$, unde c este viteza de fază :

$$\Psi = \Psi(x - ct) = \Psi(\Phi)$$

În aceste condiții :

$$\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} = \frac{d\Psi}{d\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{d\Psi}{d\Phi} \quad ; \quad \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \frac{d\Psi}{d\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c\frac{d\Psi}{d\Phi}$$

Înlocuind aceste expresii în formulele densităților de energie cinetică şi potențială, rezultă :

$$w_p = \frac{E}{2}\left(\frac{d\Psi}{\partial \Phi}\right)^2$$

$$w_c = \frac{\rho}{2}c^2\left(\frac{d\Psi}{\partial \Phi}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\frac{E}{\rho}\left(\frac{d\Psi}{\partial \Phi}\right)^2 = \frac{E}{2}\left(\frac{d\Psi}{\partial \Phi}\right)^2 = w_p$$

Concluzia este că :

în prezența unei unde longitudinale, în orice punct al mediului şi la orice moment de timp, densitatea locală de energie cinetică este egală cu densitatea locală de energie potențială: $w_c = w_p$.

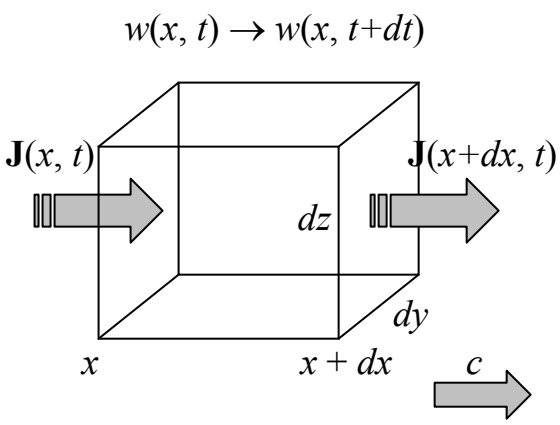
Mai rezultă de aici şi că :

în prezența unei unde longitudinale, densitatea totală de energie, adică suma dintre densitățile de energie cinetică şi potențială, este egală fie cu dublul densității de energie potențială, fie cu dublul densității de energie cinetică: $w = w_c + w_p = 2w_c = 2w_p$.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 194

Ceea ce este interesant de remarcat este că în cazul undelor plane variațiile de energie cinetică şi potențială se fac în fază, spre deosebire de cazul oscilatorului armonic unde ele sunt în cvadratură de fază.

4.3.3. TRANSFERUL DE ENERGIE



Densitatea locală de energie variază în timp. De aceea, energia mecanică conținută într-un element de volum afectat de prezența unei unde longitudinale se modifică în cursul timpului. Dacă la momentul de timp t energia elementului de volum este :

$$dW(x,t) = w(x,t)dV = w(x,t)dxdydz$$

la momentul ulterior $t + dt$ ea devine :

$$dW(x,t+dt) = w(x,t+dt)dxdydz$$

În intervalul de timp dt, variația energiei mecanice a elementului de volum este :

$$\delta(dW) = (w(x,t+dt) - w(x,t))dxdydz$$

Prin dezvoltare în serie Taylor şi prin neglijarea termenilor de ordin superior :

$$w(x,t+dt) = w(x,t) + \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}dt^2 + ... \cong w(x,t) + \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}dt$$

rezultă :

$$\delta(dW) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}dtdxdydz$$

✍ În lumina principiului conservării energiei mecanice, modificarea energiei elementului de volum nu poate fi acceptată decât dacă admitem că are loc un transfer de energie în interiorul mediului elastic, transfer făcut în procesul de propagare a undei longitudinale.

✍ Mărimea fizică aleasă pentru a măsura transferul de energie se numeşte **densitatea curentului de energie**.

PROBLEMA DE LA PAGINA 195

Găsiți expresia densității de energie cinetică pentru unda armonică plană :

$$\Psi = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Arătați că şi densitatea de energie variază periodic în timp şi spațiu şi calculați perioada.

Densitatea curentului de energie este mărimea fizică vectorială numeric egală cu energia transportată normal prin unitatea de suprafață în unitatea de timp :

$$J = \frac{dW}{dS_n dt}$$

Curentul de energie introduce în elementul de volum, în intervalul de timp *dt*, energia

$$dW_{\leftarrow} = J(x,t)dS_n dt = J(x,t)dydzdt$$

Tot în acest interval de timp, elementul de volum pierde energia :

$$dW_{\rightarrow} = J(x+dx,t)dydzdt$$

Bilanțul energetic este :

$$\delta(dW) = dW_{\leftarrow} - dW_{\rightarrow} = (J(x,t) - J(x+dx,t))dydzdt$$

Prin dezvoltare în serie Taylor şi prin neglijarea termenilor de ordin superior, rezultă :

$$\delta(dW) \cong \left(J(x,t) - J(x,t) - \frac{\partial J(x,t)}{\partial x}dx \right)dydzdt = -\frac{\partial J(x,t)}{\partial x}dxdydzdt$$

Din relația pe care am obținut-o anterior, rezultă :

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}dtdxdydz = -\frac{\partial J(x,t)}{\partial x}dxdydzdt$$

sau :

$$\boxed{\frac{\partial J(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = 0}$$

Ecuația de continuitate

PROBLEMA DE LA PAGINA 196

Alături de energie, undele transferă şi impuls. Acesta este şi motivul pentru care undele exercită presiune asupra suprafețelor aflate în calea lor. Calculați presiunea suplimentară care există într-un punct din câmpul de oscilații asociat unei unde longitudinale.

Această relație se numeşte **ecuația de continuitate** şi reprezintă exprimarea matematică cea mai generală a principiului conservării energiei mecanice în cursul propagării unei unde elastice plane, longitudinale.

Dacă remarcăm că atât densitatea de energie, cât şi densitatea curentului de energie pot fi la rândul lor funcții de undă, adică funcții care depind de faza undei plane $\Phi = x - ct$, rezultă :

$$\frac{\partial J(x,t)}{\partial x} = \frac{dJ}{d\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{dJ}{d\Phi}$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{dw}{d\Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c\frac{dw}{d\Phi}$$

astfel încât ecuația de continuitate devine :

$$\frac{d}{d\Phi}\left(J(x,t) - cw(x,t)\right) = 0$$

Prin integrare, rezultă :

$$J(x,t) = cw(x,t)$$

expresie care are forma vectorială :

$$\boxed{\mathbf{J}(x,t) = w(x,t)\mathbf{c}}$$

Densitatea locală a curentului de energie este proporțională la orice moment de timp cu densitatea locală de energie, iar transferul de energie se face în direcția şi sensul de propagare al undei elastice longitudinale.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 197

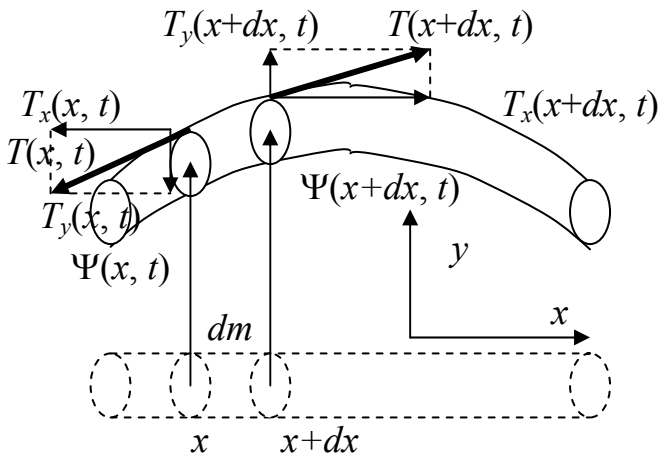
Ecuația de continuitate este valabilă şi în cazul undelor luminoase, împreună cu relația de legătură între densitatea curentului de energie şi densitatea de energie. În cazul luminii, energia este de natură electromagnetică, echivalentul energiei potențiale fiind energia câmpului electric, iar echivalentul energiei cinetice fiind energia câmpului magnetic.

4.4. VITEZA DE PROPAGARE A UNDELOR TRANSVERSALE

Undele transversale se caracterizează prin aceea că direcția de propagare este perpendiculară pe direcția în care se produc deformările mediului elastic.

Să considerăm o coardă elastică, având densitatea liniară de masă μ :

$$\mu = \frac{dm}{dx}$$



Pe direcția *Ox*, în lungul coardei, se propagă o undă transversală. Putem alege ca funcție de undă $\Psi(x, t)$ deplasarea unui punct material al coardei în raport cu poziția de echilibru. Un element de volum al coardei interacționează cu porțiunile vecine prin **forțele elastice de tensiune**. Acestea sunt tangente la coardă în fiecare punct al ei şi au aceeaşi valoare în toate punctele coardei.

Conform principiului fundamental al dinamicii schimbarea stării de mişcare a elementului de volum este determinată de rezultanta forțelor externe care acționează asupra sa.

Deoarece deplasarea elementului de volum are loc doar în lungul axei *Ox*, putem scrie :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 198

Coardele elastice sunt folosite la construcția multor instrumente muzicale (vioară, chitară, pian şi chiar țambal). Undele sonore pe care le emit aceste instrumente sunt rezultatul vibrației coardelor. Corpul instrumentului are rolul de cutie de rezonanță, care amplifică sunetul dat de coarde.

$$dm\,a_y = T_y(x+dx,t) - T_y(x,t)$$

Accelerația elementului de volum este derivata a doua a deplasării sale în raport cu timpul :

$$a_y = \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}$$

Prin dezvoltare în serie Taylor şi neglijarea termenilor de ordin superior, rezultă :

$$T_y(x+dx,t) = T_y(x,t) + \frac{\partial T_y(x,t)}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 T_y(x,t)}{\partial x^2}dx^2 + \ldots \cong T_y(x,t) + \frac{\partial T_y(x,t)}{\partial x}dx$$

Substituind în relația anterioară, obținem :

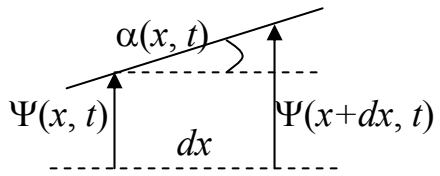
$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2}dm = \frac{\partial T_y(x,t)}{\partial x}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dx}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y(x,t)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \mu\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y(x,t)}{\partial x}$$

Componenta verticală a tensiunii din coardă poate fi calculată în funcție de tensiunea T (care nu depinde de poziția x) şi de unghiul $\alpha(x, t)$ pe care tensiunea îl face cu orizontala (acelaşi ca şi unghiul dintre tangenta la coardă în punctul de coordonată x şi orizontală) :

$$T_y(x,t) = T\,sin\,\alpha(x,t)$$

În ipoteza în care deformarea coardei este mică, deplasările punctelor materiale ale coardei față de pozițiile lor de echilibru sunt mici, ceea ce înseamnă că unghiul α are valori mici şi putem aproxima sinusul său prin însuşi unghiul exprimat în radiani :

$$sin\,\alpha(x,t) = \alpha(x,t)$$



Cum se vede din figura alăturată, putem scrie :

$$tg\,\alpha(x,t) = \frac{\Psi(x+dx,t) - \Psi(x,t)}{dx}$$

După dezvoltarea în serie Taylor şi neglijarea termenilor de ordin superior, ne rămâne :

$$\Psi(x+dx,t) - \Psi(x,t) \cong \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}dx$$

Valoarea mică a unghiului α ne permite aproximația :

PROBLEMA DE LA PAGINA 199

Un arc are înălțimea de 1,4 m. Arcaşul aplică coardei o forță de 300 N, „întinzând” arcul cu 12 cm. Calculați forța de întindere din coardă.

$$tg\,\alpha(x,t) \cong \alpha(x,t)$$

astfel încât în final rezultă :

$$\alpha(x,t) = \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}$$

În aceste condiții, componenta verticală a tensiunii devine :

$$T_y(x,t) = T\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x}$$

Derivata sa în raport cu coordonata x este :

$$\frac{\partial T_y(x,t)}{\partial x} = T\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

astfel încât relația provenită din aplicarea principiului fundamental al dinamicii capătă forma :

$$\mu\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

sau :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0}$$

Comparând cu ecuația diferențială a undelor plane :

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

observăm similaritatea celor două expresii şi tragem următoarele concluzii :

Perturbațiile care au loc în direcție transversală se propagă prin coarda elastică sub forma unei unde plane transversale.

Viteza de fază a undelor transversale are expresia :

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

unde T este forța de tensiune din coardă, iar μ este densitatea liniară de masă a coardei.

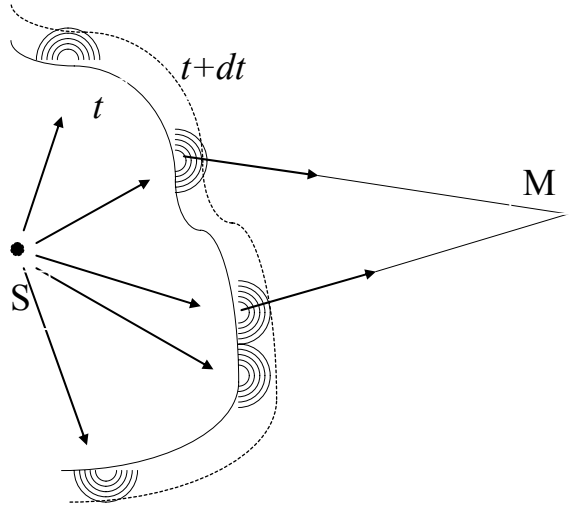
ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 200

Fiind dată o coardă confecționată din oțel, credeți că viteza de propagare a undelor transversale este mai mare sau mai mică decât aceea a undelor longitudinale ?

4.5. FENOMENE ÎNTÂLNITE ÎN CURSUL PROPAGĂRII UNDELOR ELASTICE

4.5.1. PRINCIPIUL HUYGENS - FRESNEL

Baza teoretică a explicării mai multor fenomene legate de propagarea undelor elastice este **principiul lui Huygens.** Acesta cuprinde următoarele afirmații :



❖ Toate punctele aflate pe frontul de undă (adică toate punctele având la un moment de timp dat aceeaşi fază de oscilație) sunt surse secundare de unde sferice.

❖ Undele secundare ce se propagă în sens invers nu se iau în considerație.

❖ Înfăşurătoarea undelor secundare, la un moment de timp ulterior, reprezintă noul front de undă.

Pentru a permite şi calcule matematice pe baza acestui principiu, Fresnel a adăugat următoarele afirmații :

❖ Diferența de fază între undele secundare este constantă în timp.

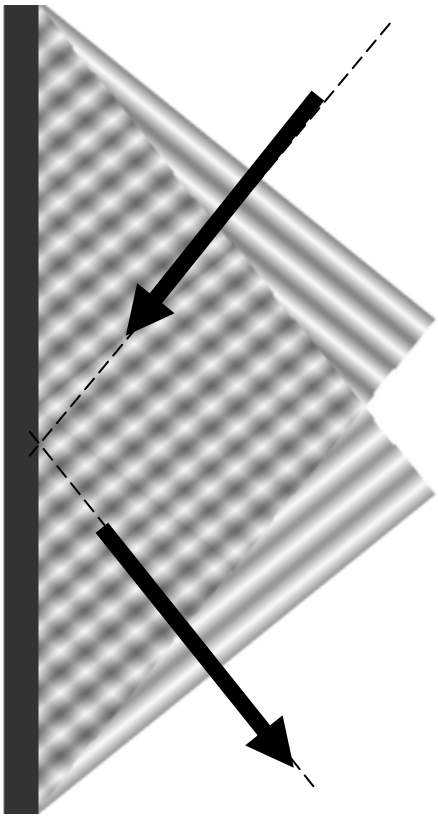
❖ Amplitudinea fiecărei unde secundare este proporțională cu mărimea ariei elementului de suprafață care o generează.

❖ Starea de oscilație într-un punct din spațiu este rezultatul interferenței tuturor undelor secundare care sosesc în acel punct.

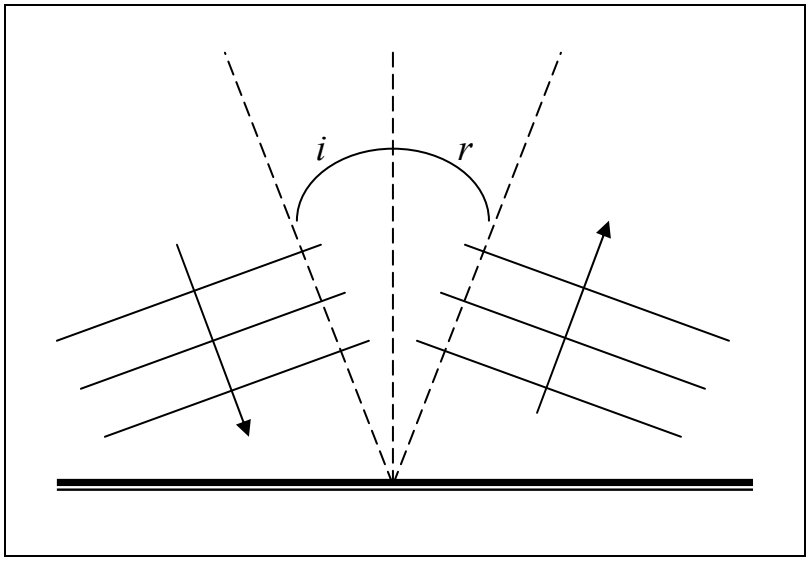
BIOGRAFIA DE LA PAGINA 201

Christiaan Huygens (1629 – 1695) matematician, astronom şi fizician olandez. A pus bazele teoriei ondulatorii a luminii, a descoperit adevărata formă a inelelor lui Saturn şi a avut contribuții originale în domeniul dinamicii. Descoperirile sale astronomice au fost posibile datorită îmbunătățirilor aduse construcției telescopului şi prelucrării lentilelor. Ca astronom, a fost preocupat de perfecționarea metodelor de măsurare a timpului, motiv pentru care a descoperit importanța pendulului ca mijloc de regularizare a funcționării ceasornicelor. A fost preocupat de studiul gravitației (având o teorie proprie, deosebită de a lui Newton) şi de studiul fenomenelor luminoase. A fost unul dintre fondatorii Academiei Franceze de Ştiințe.

4.5.2.REFLEXIA



Reflexia este fenomenul care are loc la suprafața de separație între două medii elastice şi care constă în reîntoarcerea undei în mediul din care provine.



Unghiul format de direcția de propagare a undei incidente cu normala la suprafața de separație se numeşte **unghi de incidență**. Unghiul format de direcția de propagare a undei reflectate cu suprafața de separație se numeşte **unghi de reflexie**.

Studiul experimental al reflexiei a condus la următoarea concluzie (numită **legea reflexiei**) :

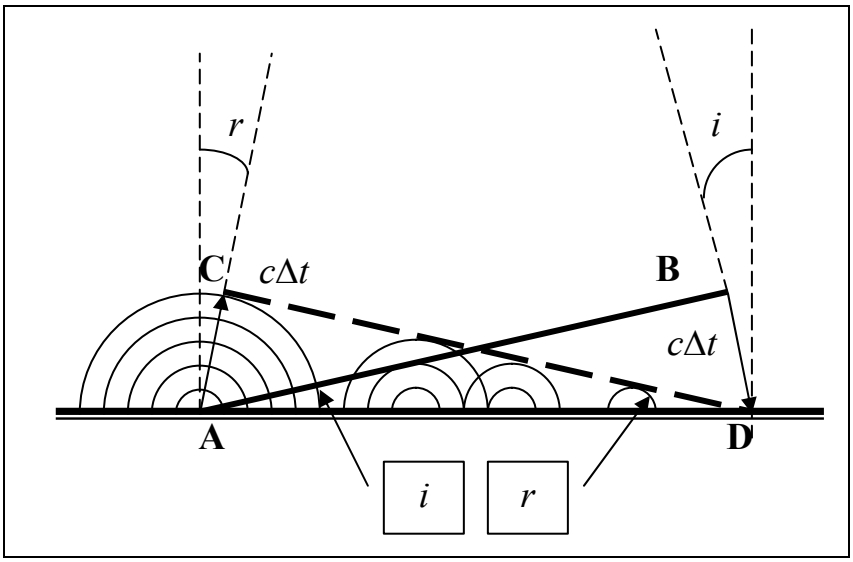
UNGHIUL DE INCIDENȚĂ ESTE EGAL CU UNGHIUL DE REFLEXIE.

$$\boxed{i = r}$$

PRECIZAREA DE LA PAGINA 202

Legile reflexiei sunt valabile nu numai în cazul undelor mecanice, ci şi în cazul undelor luminoase.

Legea reflexiei poate fi explicată utilizând principiul lui Huygens.



Frontul de undă **AB** care se propagă cu viteza de fază *c* atinge mai întâi suprafața de separație **AD** în punctul **A**. Celălalt capăt (**B**) mai are de parcurs în acest moment distanța **BD**. Timpul necesar este :

$$\Delta t = \frac{\mathbf{BD}}{c}$$

În acest timp undele secundare generate în **A** se propagă pe distanța **AC** :

$$\mathbf{AC} = c\Delta t = \mathbf{BD}$$

Înfăşurătoarea undelor secundare este noul front de undă **CD**. În triunghiul **ABD**, sinusul unghiului *i* este :

$$\sin i = \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{AD}}$$

În triunghiul **ACD**, sinusul unghiului *r* este :

$$\sin r = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AD}}$$

Pentru că segmentele **AC** şi **BD** sunt egale ca lungime, rezultă :

$$\sin i = \sin r$$

sau :

$$\boxed{i = r}$$

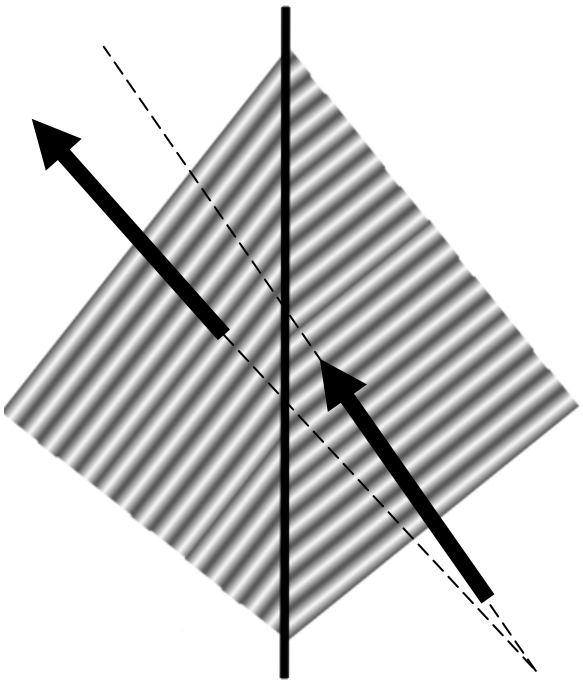
care reprezintă tocmai legea reflexiei.

✍ Ar mai fi de menționat că există şi o a doua lege a reflexiei, care, implicit, se găseşte şi în demonstrația de mai sus : **direcția undei incidente, normala la suprafața de separație între mediile elastice şi direcția undei reflectate se găsesc în acelaşi plan**.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 203

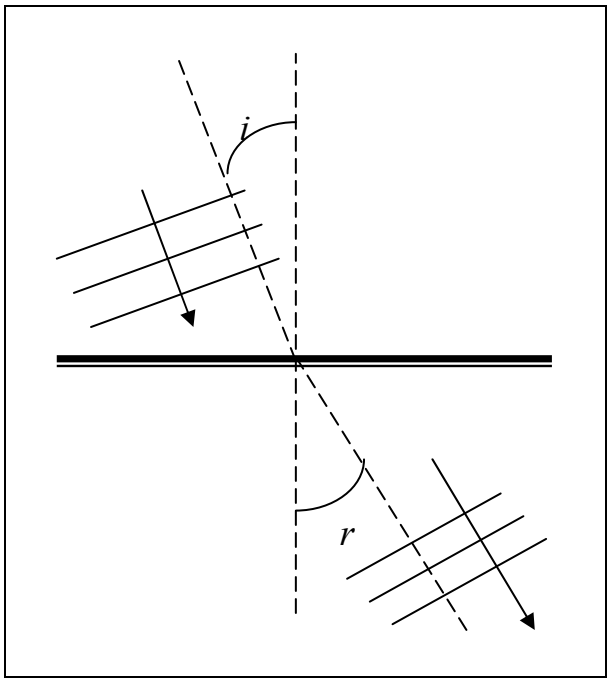
Dacă reflexia nu are loc pe o suprafață perfect lustruită, ea este acompaniată de **difuzie**. Difuzia este caracterizată prin aceea că undele emergente se propagă în direcții diferite, deoarece unghiul de incidență diferă de la un punct al suprafeței la altul. În cazul luminii, existența difuziei este observabilă după aspectul suprafeței pe care are loc reflexia : lucios în cazul că este bine şlefuită şi mat, în caz contrar.

4.5.3.REFRACȚIA



Refracția este fenomenul care are loc la suprafața de separație între două medii elastice şi care constă în schimbarea direcției de propagare a undei la pătrunderea din primul mediu în al doilea mediu.

Unghiul format de direcția de propagare a undei incidente cu normala la suprafața de separație se numeşte **unghi de incidență**. Unghiul format de direcția de propagare a undei refractate cu suprafața de separație se numeşte **unghi de refracție**.



Studiul experimental al refracției a condus la următoarea concluzie (numită **legea refracției**) :

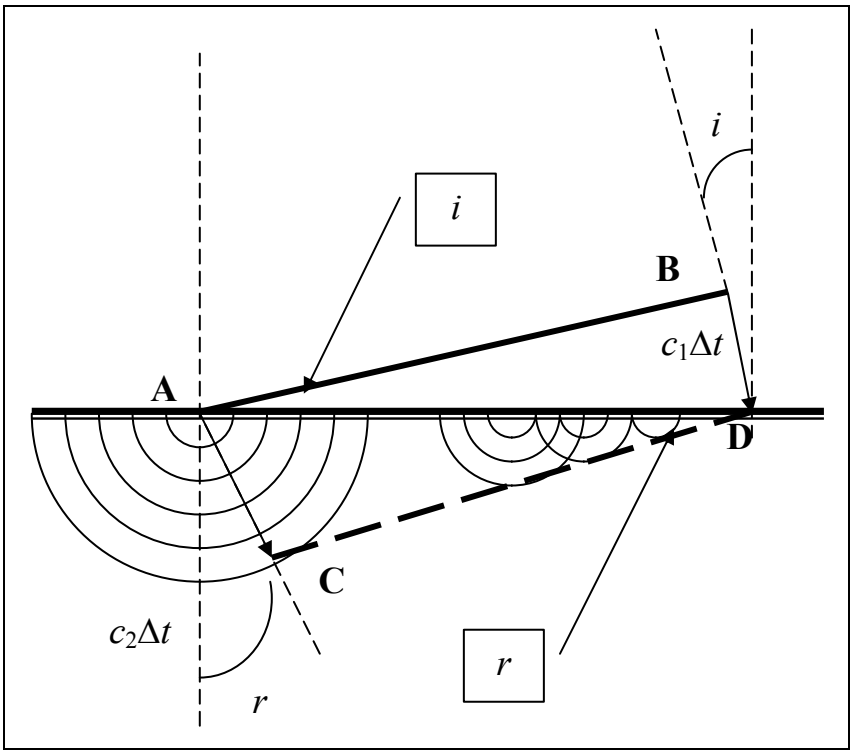
RAPORTUL DINTRE SINUSUL UNGHIULUI DE INCIDENȚĂ ŞI SINUSUL UNGHIULUI DE REFRACȚIE ESTE O CONSTANTĂ CARE DEPINDE DOAR DE NATURA MEDIILOR ELASTICE AFLATE ÎN CONTACT.

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n_{1,2}$$

PRECIZAREA DE LA PAGINA 204

Legile refracției sunt valabile nu numai în cazul undelor mecanice, ci şi în cazul undelor luminoase.

Legea reflexiei poate fi explicată utilizând principiul lui Huygens.



Frontul de undă **AB** care se propagă în primul mediu cu viteza de fază c_1 atinge mai întâi suprafața de separație **AD** în punctul **A**. Celălalt capăt (**B**) mai are de parcurs în acest moment distanța **BD**. Timpul necesar este :

$$\Delta t = \frac{\mathbf{BD}}{c_1}$$

În acest timp undele secundare generate în **A** se propagă în mediul al doilea, cu viteza de fază c_2, pe distanța **AC** :

$$\mathbf{AC} = c_2\Delta t = \frac{c_2}{c_1}\mathbf{BD}$$

Înfăşurătoarea undelor secundare este noul front de undă **CD**. În triunghiul **ABD**, sinusul unghiului *i* este :

$$\sin i = \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{AD}}$$

În triunghiul **ACD**, sinusul unghiului *r* este :

$$\sin r = \frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AD}}$$

Făcând raportul celor două sinusuri, rezultă :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\mathbf{BD}}{\mathbf{AC}}$$

Dată fiind relația între lungimile segmentelor **AC** şi **BD**, rezultă :

$$\boxed{\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2}}$$

care reprezintă tocmai legea refracției.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 205

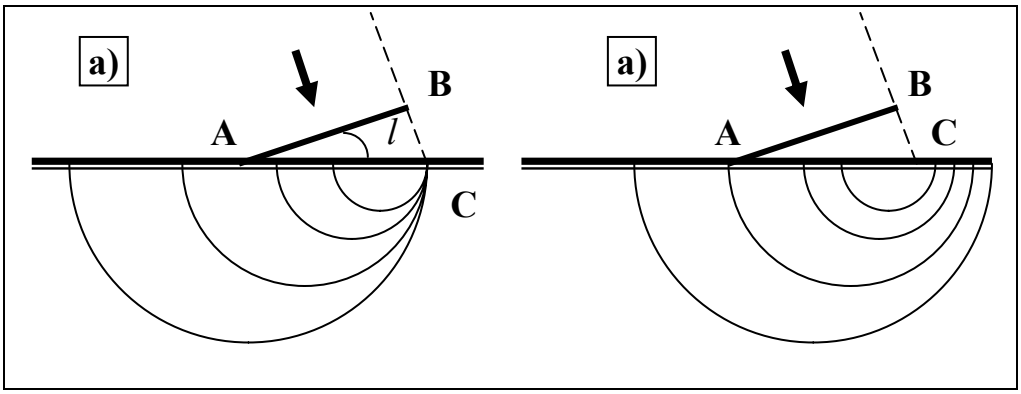
În cazul undelor luminoase, raportul c_1/c_2 se numeşte **indice de refracție relativ** al celui de-al doilea mediu în raport cu primul. Raportul dintre viteza luminii în vid (300000 km/s) şi viteza luminii într-un anumit mediu se numeşte **indice de refracție absolut** al mediului respectiv şi se notează cu litera *n*. Indicii de refracție absoluți au întotdeauna valori supraunitare.

Demonstrația făcută utilizând principiul lui Huygens ne permite să precizăm mai bine ce semnifică constanta care caracterizează cele două medii. Mai concret, semnificația sa este aceea de raport între vitezele de propagare a undei elastice în cele două medii. De aceea, legea refracției poate fi reformulată astfel :

RAPORTUL DINTRE SINUSUL UNGHIULUI DE INCIDENȚĂ ŞI SINUSUL UNGHIULUI DE REFRACȚIE ESTE NUMERIC EGAL CU RAPORTUL DINTRE VITEZA DE FAZĂ A UNDEI ÎN MEDIUL DE INCIDENȚĂ ŞI VITEZA DE FAZĂ ÎN MEDIUL DE REFRACȚIE.

Ar mai fi de menționat că există şi o a doua lege a refracției, care, implicit, se găseşte şi în demonstrația de mai sus : **direcția undei incidente, normala la suprafața de separație între mediile elastice şi direcția undei refractate se găsesc în acelaşi plan**.

4.5.4. REFLEXIA TOTALĂ



Dacă viteza de fază a undei în mediul de incidență este mai mică decât cea din mediul de refracție, există un unghi de incidență maxim pentru care refracția mai poate avea loc. Acest unghi se numeşte **unghi limită** şi corespunde cazului în care înfăşurătoarea undelor secundare se reduce la un singur punct : acela în care toate undele secundare sunt tangente (cazul **a)** din figura de mai sus). Distanța **AC** este egală în acest caz cu $c_2\Delta t$, unde Δt = **BC**/c_1. Cum **BC**/**AC** = *sin l*, rezultă că unghiul limită poate fi calculat conform relației :

$$\boxed{sin\, l = \frac{c_1}{c_2}}$$

Unghiul de incidență limită

Pentru unghiuri de incidență mai mari decât unghiul limită (cazul **b)** din figură) nu mai există o înfăşurătoare a undelor secundare şi, implicit, nici unda refractată. În această situație spunem că se produce **reflexia totală**.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 206

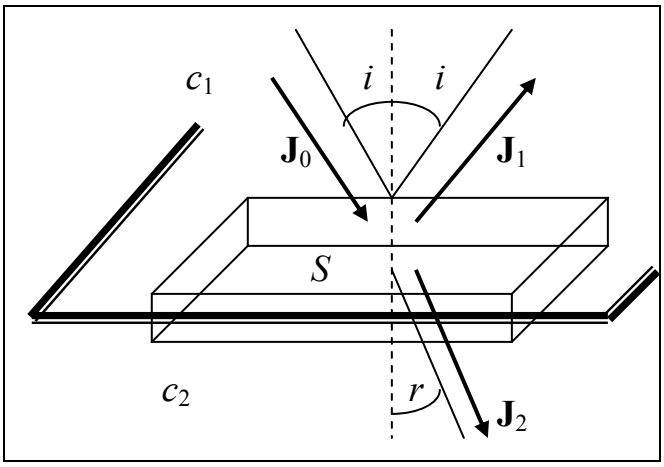
În dispozitivele optice, se folosesc prisme cu reflexie totală pentru a înlocui oglinzile utilizate în construcția unor instrumente optice (cum ar fi, de exemplu, periscopul). Avantajule prismelor cu reflexie totală față de oglinzi este acela că pierderea de energie prin reflexie în interiorul prismei este mult mai mică decât aceea din oglindă.

4.5.5. COEFICIENȚII DE REFLEXIE ȘI DE TRANSMISIE

Reflexia şi refracția sunt complementare, în sensul că, în general, amândouă aceste fenomene se produc simultan la momentul în care o undă întâlneşte suprafața de separație dintre două medii elastice şi că energia transportată de unda incidentă este împărțită între unda reflectată şi unda refractată.

Dacă reflexia şi refracția au loc simultan şi aceste două procese îşi dispută energia adusă de unda incidentă, este firesc să ne punem următoarea întrebare :

DE CE FACTORI DEPINDE MODUL ÎN CARE UNDELE REFLECTATĂ ŞI REFRACTATĂ ÎŞI ÎMPART ENERGIA „MOŞTENITĂ" DE LA UNDA INCIDENTĂ ŞI CARE ESTE EXPRESIA CANTITATIVĂ A RAPORTULUI ÎN CARE SE FACE ACEASTĂ ÎMPĂRȚIRE ?



Să considerăm pentru început un element de volum paralelipipedic de arie a bazei S şi înălțime dh foarte mică. Elementul de volum este împărțit în două de către planul suprafeței de separație între mediile în care vitezele undei sunt c_1, respectiv c_2. Cantitatea de energie care pătrunde în acest element de volum într-un interval scurt de timp dt este :

$$dW_0 = J_0 S_n dt$$

unde J_0 este densitatea curentului de energie al undei incidente, iar S_n este aria suprafeței normale la direcția undei incidente $S_n = S\cos i$. Rezultă :

$$dW_0 = J_0 S \cos i \, dt$$

PRECIZAREA DE LA PAGINA 207

În acest subcapitol considerăm că energia undei incidente se împarte la suprafața de separație între undele reflectată şi refractată. Această afirmație este o idealizare a situației fizice reale, neglijând pierderea de energie prin absorbția la nivelul suprafeței de separare.

În acelaşi timp, din elementul de volum pleacă energie transportată atât de unda reflectată cât şi de unda refractată. Notând cu J_1 densitatea curentului de energie al undei reflectate şi cu J_2 densitatea curentului de energie al undei refractate, putem scrie :

$$dW_1 = J_1 S \cos i \, dt$$

$$dW_2 = J_2 S \cos r \, dt$$

Deoarece undele reflectată şi refractată îşi împart energia provenită de la unda incidentă putem scrie :

$$dW_0 = dW_1 + dW_2$$

sau :

$$\boxed{J_0 \cos i = J_1 \cos i + J_2 \cos r}$$

După cum am văzut într-un capitol anterior, densitatea curentului de energie este proporțională cu densitatea de energie şi cu viteza de fază a undei, iar densitatea de energie depinde de densitatea mediului şi de pătratul vitezei de oscilație a particulelor ce compun mediul (Ψ fiind elongația oscilației acestor particule) :

$$J = cw = \rho c \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2$$

Relația de conservare a energiei devine :

$$\rho_1 c_1 \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \right)^2 \cos i = \rho_1 c_1 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right)^2 \cos i + \rho_2 c_2 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right)^2 \cos r$$

sau :

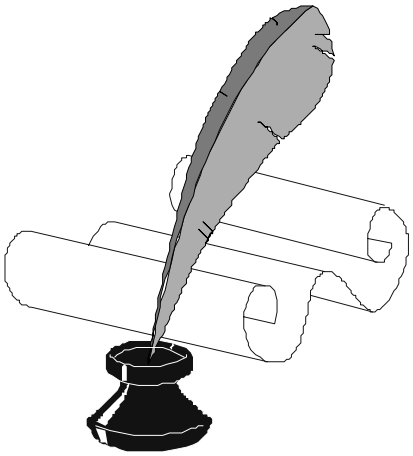
$$1 = \frac{\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right)^2}{\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \right)^2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \frac{\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right)^2}{\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \right)^2} \frac{\cos r}{\cos i}$$

Cei doi termeni care apar în membrul drept al egalității poartă numele de **coeficient de reflexie** R, respectiv **coeficient de transmisie** T :

$$R = \frac{\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \right)^2}{\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \right)^2} \quad ; \quad T = 1 - R = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \frac{\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right)^2}{\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} \right)^2} \frac{\cos r}{\cos i}$$

PRECIZAREA DE LA PAGINA 208

Relația $J_0 \cos i = J_1 \cos i + J_2 \cos r$ este valabilă atâta timp cât $r \leq 90°$ (adică atâta vreme cât nu se produce reflexia totală). Dacă unghiul de incidență depăşeşte unghiul limită coeficientul de reflexie este unitar, aceasta însemnând că nu are loc transfer de energie către mediul de refracție.



Putem observa că relația de conservare a energiei se poate pune sub forma :

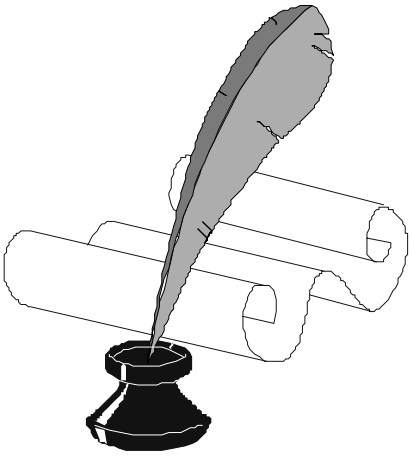
$$\frac{dW_0}{dt}=\frac{dW_1}{dt}+\frac{dW_2}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad J_0 S\cos i = J_1 S\cos i + J_2 S\cos r$$

sau :

$$\left(\rho_1 c_1 S\frac{\partial\Psi_0}{\partial t}-\rho_1 c_1 S\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial t}\cos i+\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\cos i\right)=$$

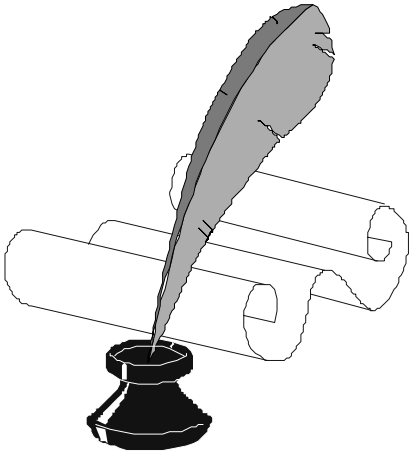
$$=\left(\rho_2 c_2 S\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}\cos r\right)$$

CE SEMNIFICAȚIE FIZICĂ AU TERMENII CARE APAR ÎN ACEASTĂ EXPRESIE ?



Pentru a răspunde la această întrebare, vom lua în discuție o undă longitudinală. În cazul undei longitudinale, oscilațiile au loc paralel cu direcția de propagare a undei, ceea ce înseamnă că şi viteza de oscilație are această direcție. Prin urmare, termenii de tipul $\frac{\partial\Psi}{\partial t}\cos\alpha$ reprezintă proiecții ale vitezelor de oscilație pe o axă perpendiculară pe suprafața de separație (adică direcția normalei la suprafață). Egalitatea :

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial t}\cos i+\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\cos i=\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}\cos r$$



poate fi interpretată ca o condiție de continuitate, în sensul că **viteza de oscilație în direcție normală imprimată de unda incidentă este egală cu rezultanta vitezelor normale imprimate de undele reflectată şi refractată**. Pe de altă parte, factorii de tipul $\rho c\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ pot fi prelucrați după cum urmează :

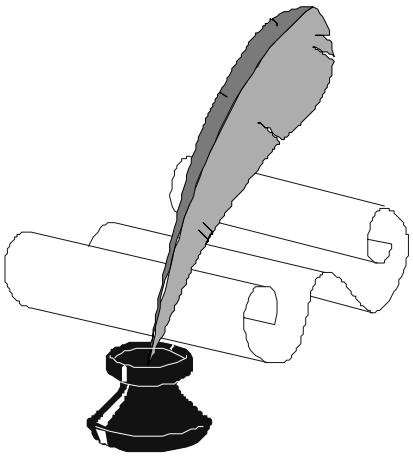
$$\frac{\partial\Psi(x-ct)}{\partial t}=\frac{d\Psi(x-ct)}{d(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}=-c\frac{d\Psi(x-ct)}{d(x-ct)}$$

Dar :

$$\frac{\partial\Psi(x-ct)}{\partial x}=\frac{d\Psi(x-ct)}{d(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial x}=\frac{d\Psi(x-ct)}{d(x-ct)}$$

OBSERVAȚIA DE LA PAGINA 209

În calculul de față nu se face referire şi la o relație de continuitate privind componentele vitezelor de oscilație în direcție paralelă la suprafața de separație. De ce această condiție nu este valabilă vă puteți imagina dacă considerați suprafața de separație dintre un strat de ulei şi unul de apă : în direcție tangențială uleiul poate aluneca pe suprafața apei, dar, în direcție normală uleiul comprimă apa.



astfel încât :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -c\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

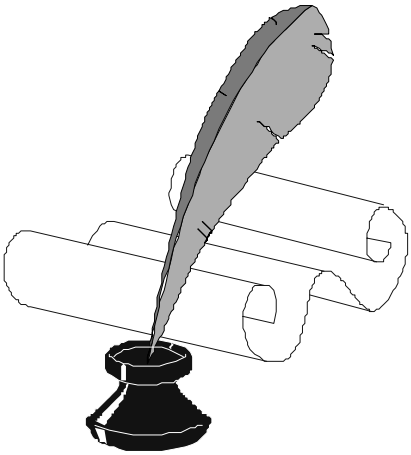
Deci :

$$\rho c\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\rho c^2\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\rho\frac{E}{\rho}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -E\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Aşa cum am văzut într-un capitol anterior, factorul $E\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ reprezintă efortul unitar (presiunea) $\frac{F}{S}$ exercitat de forțele elastice. Prin urmare, putem trage concluzia că egalitatea :

$$\rho_1 c_1 S\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} - \rho_1 c_1 S\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \rho_2 c_2 S\frac{\partial \Psi_2}{\partial t}$$

reprezintă tot o condiție de continuitate, în sensul că forța elastică exercitată normal de undele din primul mediu pe suprafața de separație este egală cu forța elastică normală exercitată de unda care se propagă în al doilea mediu. Cu alte cuvinte, **presiunea exercitată pe suprafața de separație este aceeaşi, indiferent de care dintre cele două medii ținem cont**.



Concluzia este aceea că relația de conservare a energiei poate fi considerată ca fiind rezultatul a două condiții de continuitate : una referitoare la viteza normală de oscilație şi cealaltă la forța elastică normală :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\right)\cos i = \frac{\partial \Psi_2}{\partial t}\cos r \\ \rho_1 c_1\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\right) = \rho_2 c_2\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \end{cases}$$

Se ştie că produsul dintre forță şi viteză este egal cu puterea instantanee. În acest sens, cele două relații de continuitate ne asigură că puterea preluată de unda refractată este egală cu puterea rezultantă transferată de undele incidentă şi reflectată. Deci, cele două condiții de continuitate asigură tocmai respectarea principiului conservării energiei.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 210

Deşi coeficienții de reflexie şi de transmisie pot fi calculați într-un mod oarecum asemănător şi în cazul undelor luminoase, condițiile de continuitate sunt cu totul altele şi se referă la câmpurile electric şi magnetic, ale căror variații (oscilații) în timp determină propagarea undei luminoase.

În continuare vom presupune că undele plane despre care vorbim în acest subcapitol sunt unde armonice, reprezentate prin ecuația :

$$\Psi = A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = A\,sin(\omega t - kx)$$

unde parametrul k se numeşte **număr de unde** şi are expresia $k = 2\pi/\lambda$. Viteza de oscilație are în acest caz expresia :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\partial[A\,sin(\omega t - kx)]}{\partial t} = \omega A\,cos(\omega t - kx)$$

Conform definiției suprafeței (frontului) de undă, există proprietatea că toate punctele acestuia vibrează în fază. La împărțirea undei incidente în unda reflectată şi unda refractată, în orice punct al suprafeței de separație, faza oscilației este aceeaşi pentru toate cele trei unde. De aceea, notând : $\Phi = (\omega t - kx)$, putem scrie :

$$\Psi_0 = A_0\,sin\,\Phi \quad ; \quad \Psi_1 = A_1\,sin\,\Phi \quad ; \quad \Psi_2 = A_2\,sin\,\Phi$$

Condițiile de continuitate devin :

$$\begin{cases} \omega(A_0 + A_1)cos\,\Phi\,cos\,i = \omega A_2\,cos\,\Phi\,cos\,r \\ \rho_1 c_1(A_0 - A_1)cos\,\Phi = \rho_2 c_2 A_2\,cos\,\Phi \end{cases}$$

sau :

$$\begin{cases} (A_0 + A_1)cos\,i = A_2\,cos\,r \\ \rho_1 c_1(A_0 - A_1) = \rho_2 c_2 A_2 \end{cases}$$

Cele două ecuații permit calcularea amplitudinilor A_1 şi A_2 :

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\rho_1 c_1\,cos\,r - \rho_2 c_2\,cos\,i}{\rho_1 c_1\,cos\,r + \rho_2 c_2\,cos\,i}A_0 \\ A_2 = \dfrac{2\rho_1 c_1\,cos\,i}{\rho_1 c_1\,cos\,r + \rho_2 c_2\,cos\,i}A_0 \end{cases}$$

Cunoscând expresiile amplitudinilor, putem calcula în continuare expresiile coeficienților de reflexie şi de transmisie :

PRECIZAREA DE LA PAGINA 211

În cazul în care propagarea undei are loc într-o direcție oarecare, în loc de mărimea scalară număr de unde se foloseşte mărimea vectorială numită vector de undă şi notată cu **k**. Vectorul de undă are modulul egal cu $2\pi/\lambda$, iar direcția şi sensul său coincid cu direcția şi sensul vitezei de fază. În acest caz, faza undei este $\Phi = \omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ = raza vectoare).

$$R=\frac{\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial t}\right)^2}=\frac{\omega^2A_1^2\cos^2\Phi}{\omega^2A_0^2\cos^2\Phi}=\left(\frac{\rho_1c_1\cos r-\rho_2c_2\cos i}{\rho_1c_1\cos r+\rho_2c_2\cos i}\right)^2$$

$$T=1-R=\frac{\rho_2c_2}{\rho_1c_1}\frac{\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial t}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial t}\right)^2}\frac{\cos r}{\cos i}=\frac{\rho_2c_2}{\rho_1c_1}\frac{\omega^2A_2^2\cos^2\Phi}{\omega^2A_0^2\cos^2\Phi}\frac{\cos r}{\cos i}=\frac{4\rho_1c_1\rho_2c_2\cos i\cos r}{(\rho_1c_1\cos r+\rho_2c_2\cos i)^2}$$

În general, cei doi coeficienți depind de unghiul de incidență (unghiul de refracție poate fi calculat în funcție de unghiul de incidență conform legii refracției) şi de factorii ρc.

Produsul ρc dintre densitatea unui mediu elastic şi viteza de propagare a undelor în interiorul său se numeşte **impedanță acustică**.

Putem discuta despre rolul impedanței acustice în ceea ce priveşte redistribuirea energiei undei incidente către undele reflectată şi refractată. Dacă suntem în cazul incidenței normale ($i = 0$), expresiile celor doi coeficienți devin :

$$R=\left(\frac{\rho_1c_1-\rho_2c_2}{\rho_1c_1+\rho_2c_2}\right)^2$$

$$T=\frac{4\rho_1c_1\rho_2c_2}{(\rho_1c_1+\rho_2c_2)^2}$$

Se observă că în cazul unei disproporționalități accentuate între cele două impedanțe acustice (de exemplu, $\rho_2c_2 >> \rho_1c_1$) coeficientul de reflexie este aproape unitar, în vreme ce coeficientul de transmisie se tinde către zero. Aceasta înseamnă că practic întreaga undă incidentă se reflectă pe suprafața de separație. Dacă impedanțele acustice au valori apropiate ($\rho_2c_2 \cong \rho_1c_1$) coeficientul de reflexie tinde către zero, iar coeficientul de transmisie este aproape unitar. În acest caz refracția este aproape completă.

Există posibilitatea ca unghiul de incidență să aibă o astfel de valoare încât :

$$\rho_1c_1\cos r=\rho_2c_2\cos i$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 212

În defectoscopia ultrasonoră este necesară trecerea unui ultrasunet prin suprafața de separație între două corpuri solide. În realitate, acest proces este unul care implică trei medii : cele două solide şi stratul de aer (chiar foarte subțire) care le separă. Aşa cum am arătat mai sus, aerul având impedanță acustică foarte scăzută, determină reflexia aproape totală a ultrasunetului în mediul de proveniență. Pentru a mări coeficientul de transmisie, în practică, suprafețele celor două solide sunt îmbinate printr-un strat de unsoare (de exemplu, parafină).

În acest caz, amplitudinea undei reflectate A_1 devine nulă, ceea ce înseamnă că întreaga energie purtată de unda incidentă este transferată undei refractate. Condiția care trebuie îndeplinită de unghiul de incidență pentru ca refracția să fie totală este următoarea :

$$\rho_1^2 c_1^2 \left(1 - sin^2 r\right) = \rho_2^2 c_2^2 \left(1 - sin^2 i\right) \quad \Rightarrow \quad \rho_1^2 c_1^2 \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} sin^2 i\right) = \rho_2^2 c_2^2 \left(1 - sin^2 i\right)$$

sau :

$$sin\, i = \frac{c_1}{c_2} \sqrt{\frac{1 - \frac{\rho_2^2 c_2^2}{\rho_1^2 c_1^2}}{1 - \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}}}$$

Există perechi de materiale pentru care expresia anterioară are sens matematic. De exemplu nichelul şi oțelul au valori ale modulului lui Young practic egale ($\cong 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2) şi densitățile ρ_1 = 8900 kg/m^3, respectiv ρ_2 = 7800 kg/m^3, unghiul i fiind în acest caz apropiat de 45°.

Examinând expresia amplitudinii undei reflectate, observăm că aceasta are valori pozitive dacă $\rho_1 c_1 \cos r > \rho_2 c_2 \cos i$, respectiv valori negative în caz contrar. Deoarece amplitudinea este considerată în general o mărime pozitivă, semnul ei negativ poate fi „transferat” fazei funcției armonice. Adăugând sau scăzând fazei o cantitate de π radiani ($\Phi \rightarrow \Phi + \pi$), semnul funcției armonice se schimbă în opusul său. La incidență normală saltul de fază are loc dacă $\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$, adică la reflexia pe suprafața de separație dintre un mediu cu impedanță acustică mai mică şi un mediu cu impedanță acustică mai mare. **În asemenea situații, se obişnuieşte să se spună că în urma reflexiei are loc o pierdere de drum egală cu o semilungime de undă**.

Nu am discutat în acest subcapitol ce se întâmplă în cazul reflexiei totale, adică atunci când unghiul de incidență este mai mare sau egal decât unghiul limită. Fără a recurge la calcule, voi menționa că în aceste cazuri apare o undă de suprafață, care imprimă oscilații la interfața dintre mediul al doilea şi primul mediu, în direcție paralelă cu suprafața de separație. Aceste oscilații de suprafață nu transferă energie, motiv pentru care întreaga energie a undei incidente este preluată de unda reflectată, justificându-se astfel titulatura de „reflexie totală”.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 213

Undele luminoase sunt unde transversale. Dacă „oscilația luminoasă” are loc în planul de incidență, refracția totală se produce pentru un unghi de incidență, numit **unghiul Brewster** : $tg\ i_B = c_2/c_1$. În acest caz, se face remarcat un fenomen fizic numit **polarizare prin reflexie**. Dintre aplicațiile practice larg răspândite ale polarizării luminii putem aminti parbrizele de automobil sau ochelarii de soare polarizanți.

4.5.6. INTERFERENȚA

4.5.6.1. Densitatea medie de energie, intensitatea undei

Unda plană armonică transversală poate fi descrisă de ecuația :

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{A}_0 \, sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

unde: $\mathbf{\Psi}$ este vectorul deplasare, considerat ca funcție de undă
$\mathbf{A}_0$ este amplitudinea undei
T este perioada undei
λ este lungimea de undă, cu $\lambda = cT$
c este viteza de fază a undei
x este distanța față de sursa undei
t este momentul de timp

Într-un punct fixat din spațiu are loc o oscilație de ecuație :

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{A}_0 \, sin\left[\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right] \quad cu \quad \varphi_0 = -\frac{2\pi x}{\lambda} = const$$

Densitatea medie de energie a undei poate fi calculată cu expresia :

$$\langle w \rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^T w(t)dt$$

Densitatea de energie a unei unde depinde viteza de oscilație a particulelor mediului elastic conform relației următoare :

$$w = \rho\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 = \rho\frac{4\pi^2}{T^2}A_0^2 \, cos^2\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \rho\omega^2 A_0^2 \, cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Rezultă :

PRECIZAREA DE LA PAGINA 214

Rezultate asemănătoare se obțin şi în cazul undelor luminoase. Diferența este aceea că în loc să vorbim despre oscilații ale unor puncte materiale, luăm în considerație variațiile periodice ale câmpurilor electric şi magnetic.

$$\langle w\rangle_t = \frac{\rho\omega^2 A_0^2}{T}\int_0^T cos^2(\omega t+\varphi_0)dt = \frac{\rho\omega^2 A_0^2}{T}\int_0^T \frac{1+cos\,2(\omega t+\varphi_0)}{2}dt$$

sau :

$$\langle w\rangle_t = \frac{\rho\omega^2 A_0^2}{2T}\int_0^T dt + \frac{\rho\omega^2 A_0^2}{2T}\underbrace{\int_0^T cos\,2(\omega t+\varphi_0)dt}_{0} = \frac{\rho\omega^2 A_0^2}{2T}T$$

Pentru că media pe o perioadă a unei funcții armonice este nulă, ne rămâne :

$$\boxed{\langle w\rangle_t = \frac{\rho\omega^2 A_0^2}{2}}$$

adică : **densitatea medie de energie a undei este proporțională cu densitatea mediului, cu pătratul pulsației undei şi cu pătratul amplitudinii undei**.

Vom numi în continuare densitatea medie de energie a undei **intensitate a perturbației locale** şi o vom nota cu $\mathcal{I}$. În cele ce urmează ne va interesa în special faptul că intensitatea perturbației este proporțională cu pătratul amplitudinii undei :

$$\mathcal{I} \sim A_0^2$$

În sens energetic, prin **intensitatea unei unde** se înțelege media temporală a densității curentului de energie, adică valoarea medie a energiei transferate de undă în unitatea de timp, normal prin unitatea de suprafață:

$$I = \langle J\rangle_t = \langle cw\rangle_t = c\mathcal{I} = \frac{\rho c\omega^2 A_0^2}{2}$$

După cum reiese din formula de mai sus intensitatea perturbației locale şi intensitatea undei sunt direct proporționale, factorul de proporționalitate fiind viteza de fază a undei.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 215

De multe ori, prin intensitatea unei unde se înțelege media temporală a pătratului funcției de undă. Cum aminteam anterior, există mai multe mărimi fizice a căror variație în timp şi spațiu să poată fi folosită ca funcție de undă. Semnificație fizică, cel puțin în contextul de față, au doar cele două intensități definite mai sus şi referitoare la mărimi energetice.

4.5.6.2. Caracteristicile şi condiţiile de producere ale interferenţei

Fenomenul de interferenţă poate fi caracterizat astfel :

⇒ Este observabil într-o zonă a spaţiului unde se suprapun două sau mai multe unde.

⇒ În câmpul de interferenţă (adică zona de suprapunere a undelor) amplitudinea de oscilaţie a particulelor mediului elastic depinde de poziţie. În funcţie de poziţie, intensitatea perturbaţiei locale variază între o valoare minimă şi una maximă. În cazul în care rezultantul interferenţei poate fi vizualizat, se remarcă curbe de-a lungul cărora amplitudinea vibraţiei este aceeaşi, ieşind în evidenţă curbele corespunzătoare maximelor sau minimelor amplitudinii. Aceste curbe se mai numesc franje de interferenţă.

Pentru a explica fenomenul de interferenţă se consideră că în fiecare punct al câmpului de interferenţă are loc compunerea vectorială a deplasărilor determinate de cele două unde. Astfel, deplasarea rezultantă în punctul de suprapunere al undelor este :

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}_1 + \mathbf{\Psi}_2$$

Densitatea de energie w este :

$$\frac{w}{\rho} = \left(\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t}$$

Prin mediere în timp rezultă :

$$\left\langle \frac{w}{\rho} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t}\right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\right)^2 \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial t}\right)^2 \right\rangle + 2\left\langle \frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t} \right\rangle$$

PRECIZAREA DE LA PAGINA 216

Interferenţa este un fenomen care se poate produce atât în cursul propagării undelor mecanice, cât şi a celor luminoase. De aceea, tot ce se discută în continuare despre interferenţă este valabil în ambele cazuri.

✍ Dacă termenul $\left\langle \frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t} \right\rangle$ este nul interferența nu se observă pentru că intensitatea perturbației locale va fi doar simpla însumare a intensităților celor două perturbații($\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2$), iar franjele de interferență nu-şi fac apariția. Din acest motiv termenul $\left\langle \frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t} \right\rangle$ se numeşte **termen de interferență**.

❖ Prima condiție pentru ca termenul de interferență să fie nenul este aceea ca **vitezele de oscilație $\frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t}$ şi $\frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t}$ ale celor două unde să nu fie perpendiculare una pe cealaltă. Rezultă că şi direcțiile de vibrație trebuie să nu fie perpendiculare între ele.**

Luând în discuție unde plane armonice transversale :

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{A}\, sin\left[\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right] \quad cu \quad \varphi = -\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0 = const$$

viteza de oscilație a unui punct material al mediului este :

$$\frac{\partial \mathbf{\Psi}}{\partial t} = \frac{2\pi}{T}\mathbf{A}\, cos\left[\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right]$$

Vom considera în continuare că vectorii viteză de oscilație sunt paraleli :

$$\frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t} \Bigg\| \frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t} \quad \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial t}$$

În consecință :

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{4\pi^2}{T_1 T_2} A_1 A_2\, cos\left(2\pi \frac{t}{T_1} + \varphi_1\right) cos\left(2\pi \frac{t}{T_2} + \varphi_2\right) \right\rangle$$

sau :

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{T_{1,2}} \int_0^{T_{1,2}} \frac{4\pi^2}{T_1 T_2} A_1 A_2\, cos\left(2\pi \frac{t}{T_1} + \varphi_1\right) cos\left(2\pi \frac{t}{T_2} + \varphi_2\right) dt$$

unde $T_{1,2}$ este perioada comună a celor două unde: $T_{1,2} = n_1 T_1 = n_2 T_2$. Observând că :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 217

Interferența luminii este un fenomen care se poate remarca cu uşurință în realitatea de zi cu zi. Culorile pe care le prezintă petele de ulei răspândite pe suprafața apei sunt un exemplu de franje de interferență.

$$cos\left(2\pi\frac{t}{T_1}+\varphi_1\right)cos\left(2\pi\frac{t}{T_2}+\varphi_2\right)=$$

$$=\frac{cos\left[2\pi t\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)+\varphi_1-\varphi_2\right]+cos\left[2\pi t\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)+\varphi_1+\varphi_2\right]}{2}$$

notând $\Phi_- = \varphi_1 - \varphi_2$; $\Phi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$ şi **considerându-le constante în timp**, rezultă două tipuri de soluții :

a) $T_1 \neq T_2$:

$$\left\langle\frac{\partial\mathbf{\Psi}_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial\mathbf{\Psi}_2}{\partial t}\right\rangle=\frac{1}{T_{1,2}}\frac{4\pi^2A_1A_2}{T_1T_2}\frac{1}{2}\left\{-\frac{sin\left[2\pi t\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)+\Phi_-\right]}{2\pi\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)}-\frac{sin\left[2\pi t\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)+\Phi_+\right]}{2\pi\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)}\right\}\Bigg|_0^{T_{1,2}}=$$

$$=\frac{1}{T_{1,2}}\frac{4\pi^2A_1A_2}{T_1T_2}\frac{1}{2}\left\{-\frac{sin[2\pi(n_1-n_2)+\Phi_-]-sin\Phi_-}{2\pi\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)}-\frac{sin[2\pi(n_1+n_2)+\Phi_+]-sin\Phi_+}{2\pi\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)}\right\}=0$$

Deci : **dacă perioadele celor două unde sunt diferite, termenul de interferență este nul** !

b) $T_1 = T_2 = T$:

$$\left\langle\frac{\partial\mathbf{\Psi}_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial\mathbf{\Psi}_2}{\partial t}\right\rangle=\frac{4\pi^2A_1A_2}{T^2}\frac{1}{T}\frac{1}{2}\left[\int_0^T cos\,\Phi_-dt+\int_0^T cos\left(\frac{4\pi t}{T}+\Phi_+\right)dt\right]=$$

$$=\frac{4\pi^2A_1A_2}{T^2}\frac{1}{T}\frac{1}{2}\left[T\,cos\,\Phi_-\frac{sin(4\pi+\Phi_+)-sin\,\Phi_+}{\frac{4\pi}{T}}\right]=\frac{4\pi^2A_1A_2}{2T^2}cos\,\Phi_-$$

sau :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 218

Interferența undelor electromagnetice este o cauză care poate influența calitatea transmisiilor de radio sau televiziune. Din acest motiv, există regulamente internaționale şi naționale care limitează frecvențele de transmisie şi raza de acțiune a emițătoarelor.

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t} \right\rangle = \frac{4\pi^2 A_1 A_2}{2T^2} cos\left[\frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} + \varphi_{01} - \varphi_{02} \right]$$

Se observă că de această dată termenul de interferență este, în general, nenul.

❖ Deci **o altă condiție necesară pentru a avea loc interferența este ca undele care interferă să aibă perioade (sau frecvențe) egale**.

❖ De asemenea, condiția ca φ_{01} şi φ_{02} să fie constante în timp, este puțin probabil să fie îndeplinită de undele care provin de la două surse de oscilație independente, pentru care $\varphi_{01} \pm \varphi_{02} \neq const$. De aceea, **singura posibilitate de a obține experimental interferența este aceea ca undele care interferă să provină de la aceeaşi sursă**, caz în care $\varphi_{01} - \varphi_{02} = 0$.

În rezumat :

❖ interferența este pusă în evidență experimental dacă termenul de interferență este nenul $\left\langle \frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t} \right\rangle$.

Pentru ca această condiție să fie îndeplinită trebuie verificat un grup de criterii, care sunt următoarele :

❖ oscilațiile să aibă direcții paralele

❖ perioadele de oscilație să fie egale

❖ undele care interferă să fie generate de o singură sursă de oscilații

❖ Acest grup de criterii poartă denumirea generică de **condițiile de coerență**, astfel încât, pe scurt, facem afirmația :

Pentru ca două unde să interfereze trebuie ca ele să fie coerente.

Să considerăm acum unde coerente care de la sursă până în punctul de întâlnire au parcurs drumurile x_1, respectiv x_2. În acest caz termenul de interferență are expresia :

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t} \right\rangle = \frac{4\pi^2 A_1 A_2}{2T^2} cos\left[\frac{2\pi(x_2 - x_1)}{\lambda} \right]$$

Ştiind că $\omega = 2\pi/T$, observăm că :

COMENTARIUL DE LA PAGINA 219

Faptul că termenul de interferență nu depinde de timp (şi deci este doar o mărime locală) nu înseamnă că oscilațiile punctelor materiale ale mediului elastic încetează ! Ceea ce depinde doar de poziție şi nu de timp este doar amplitudinea de oscilație.

$$\langle w_1\rangle_t\langle w_2\rangle_t = \frac{\rho^2\omega^4 A_1^2 A_2^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\langle w_1\rangle_t\langle w_2\rangle_t} = \frac{\rho\omega^2 A_1 A_2}{2} = \frac{\rho\frac{4\pi^2}{T^2}A_1A_2}{2}$$

rezultând :

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{\Psi}_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial \mathbf{\Psi}_2}{\partial t}\right\rangle = \frac{\langle w_1\rangle_t\langle w_2\rangle_t}{\rho}\cos\left[\frac{2\pi(x_2-x_1)}{\lambda}\right]$$

În aceste condiții:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 2\sqrt{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2}\cos\frac{2\pi(x_2-x_1)}{\lambda}$$

În funcție de valoarea diferenței de drum $\Delta x = x_2 - x_1$ putem obține două situații extreme :

❖ dacă $\cos\frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = 1 \Rightarrow \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = 2k\pi \Rightarrow \Delta x = k\lambda,\ k \in \mathbf{Z}$ atunci :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 2\sqrt{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2} = \left(\sqrt{\mathcal{I}_1} + \sqrt{\mathcal{I}_2}\right)^2$$

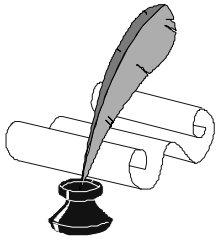
Dacă diferența de drum este egală cu un număr întreg de lungimi de undă atunci se obține un **maxim de interferență**, intensitatea perturbației fiind mai mare decât suma intensităților perturbațiilor celor două unde.

❖ dacă $\cos\frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = -1 \Rightarrow \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = (2k+1)\pi \Rightarrow \Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2},\ k \in \mathbf{Z}$

atunci :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 - 2\sqrt{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2} = \left(\sqrt{\mathcal{I}_1} - \sqrt{\mathcal{I}_2}\right)^2$$

Dacă diferența de drum este egală cu un număr semiîntreg de lungimi de undă atunci se obține un **minim de interferență**, intensitatea perturbației fiind mai mică decât suma intensităților perturbațiilor celor două unde.



În particular, dacă $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$, maximele de interferență au o intensitate de două ori mai mare decât simpla sumă a intensităților undelor, iar minimele de interferență sunt nule.

IDEEA DE LA PAGINA 220

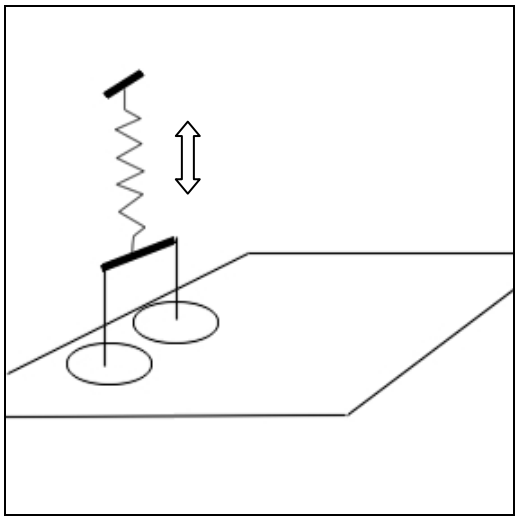
În particular, posibilitatea de a obține minime de interferență conduce la situații aparent paradoxale : întâlnirea a două zgomote poate avea ca rezultat liniștea și întâlnirea a două radiații luminoase poate avea ca rezultat întunericul ! Cu toată „ciudățenia” acestor situații, ele pot fi utilizate în practică, de pildă, la atenuatoarele active de zgomot sau la straturile antireflex depuse pe lentilele aparatelor fotografice.

✍ În câmpul de interferență are loc o variație continuă a intensității perturbației între punctele de maxim şi punctele de minim. Locul geometric al punctelor din câmpul de interferență care au intensități de perturbație egale formează o curbă denumită **franjă de interferență**. Franjele de maxim de interferență alternează cu cele de minim, formându-se (în cazul în care aceste sunt vizibile) o figură caracteristică, cu aspect striat.

Fenomenul de interferență nu presupune crearea sau distrugerea de energie, cum ar lăsa impresia existența maximelor şi minimelor de amplitudine, ci doar simpla redistribuire a energiei undelor ce interferă.

4.5.6.3. Cazuri particulare de interferență

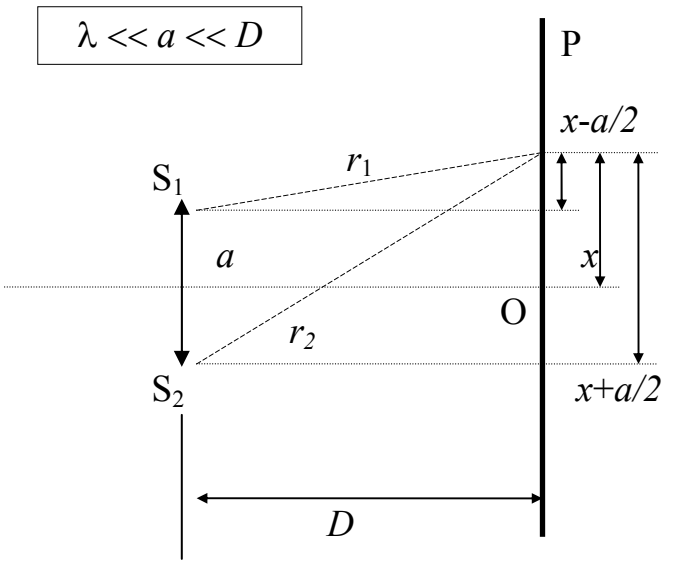
4.5.6.3.1. Interferența undelor transversale provenind de la două surse punctiforme de oscilații



Să ne imaginăm un oscilator armonic care vibrează în plan vertical. Oscilatorului îi sunt ataşate două tije care ating suprafața lichidului conținut într-o tavă orizontală. Vibrând, tijele generează la suprafața lichidului unde transversale, cu fronturi de unde circulare. La distanțe suficient de mari față de cele două surse de oscilații, undele care se propagă la suprafața lichidului pot fi aproximate cu unde plane. Aceeaşi aproximație este valabilă şi dacă undele ar fi unde longitudinale. Mai mult, dacă în cazul undelor transversale direcțiile de oscilație ale particulelor mediului sunt paralele oricare ar fi distanța față de sursele de oscilații, în cazul undelor longitudinale, direcțiile oscilațiilor sunt practic paralele la distanțe mari față de sursele de oscilație.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 221

Experiența descrisă la această pagină foloseşte *un singur* resort elastic, la care sunt ataşate două tije. Vă puteți întreba de ce nu se folosesc două resorturi identice, fiecare cu tija lui. Răspunsul este acela că nu pot exista două resorturi absolut identice şi, prin urmare, frecvențele lor de oscilație nu ar fi riguros egale, ceea ce ar conduce la nerespectarea condiției de coerență.



Distanța a dintre cele două surse de oscilație este mult mai mică decât distanța D dintre planul surselor și planul de observație P ($a << D$). În planul de observație, distanța fața de axa de simetrie, x, este și ea mică în comparație cu distanța de la planul surselor la planul de observație ($x << D$). Rezultatul interferenței într-un punct al planului de observație depinde de valoarea diferenței de drum dintre undele care se întâlnesc în acel punct :

$$\Delta r = r_2 - r_1$$

Putem observa că :

$$r_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$r_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

Scăzând cele două relații obținem :

$$r_2^2 - r_1^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 2ax$$

Cum $a, x << D$ putem face aproximația :

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) \cong \Delta r \cdot 2D$$

Rezultă :

$$\Delta r = \frac{ax}{D}$$

Pentru ca în punctul considerat să se formeze un maxim de interferență, este necesar ca diferența de drum să fie egală cu un număr întreg de lungimi de undă :

$$\Delta r = k\lambda$$

Din cele două relații se găsește expresia coordonatelor franjelor de maxim de interferență din planul de observație :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 222

Echivalentul în optică al dispozitivului mecanic prezentat aici este **dispozitivul lui Young**. Acesta constă dintr-un paravan, în care sunt practicate două fante paralele, lungi, apropiate și extrem de înguste, care lasă să treacă lumina ce provine de la o sursă și trece printr-un filtru colorat. Franjele de interferență se pot vedea pe un ecran plasat în spatele paravanului.

$$x_k = k\frac{\lambda D}{a}$$

Observăm că distanța dintre două maxime consecutive este :

$$i = x_{k+1} - x_k = (k+1)\frac{\lambda D}{a} - k\frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{a}$$

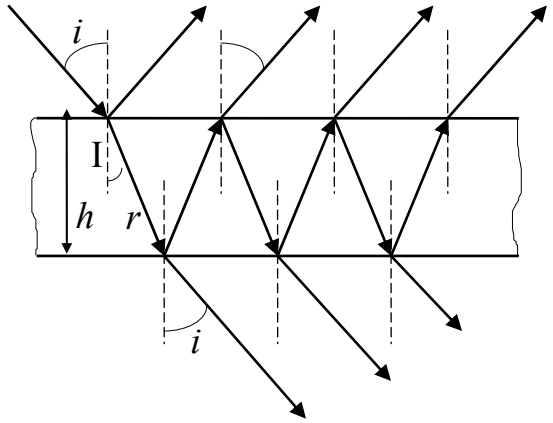
Distanța dintre două franje succesive de maxim de interferență (numită **interfranjă**) este o constantă care depinde de lungimea de undă şi de dimensiunile geometrice ale dispozitivului interferențial.

În mod analog se pot calcula coordonatele franjelor de minim de interferență, rezultând :

$$x'_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{a}$$

Distanța dintre două franje succesive de minim de interferență este aceeaşi ca şi distanța dintre două franje de maxim de interferență.

4.5.6.3.2. Interferența între undele care suferă reflexii şi refracții multiple



Vom discuta în cele ce urmează ceea ce se întâmplă prin divizarea repetată a amplitudinii unei unde elastice la suprafața de separație dintre două medii elastice, consecutiv reflexiei sau refracției.

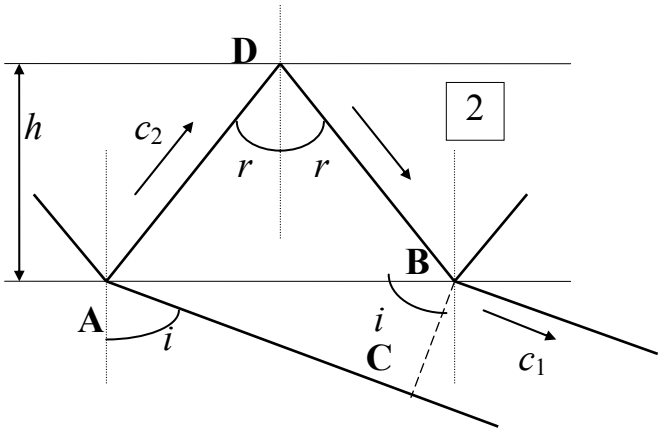
Considerăm un strat, mărginit de două suprafețe plan paralele, de grosime h, conținut în interiorul unui alt mediu elastic.

Divizarea repetată a undei incidente, prin reflexie şi refracție, are ca rezultat apariția, de o parte şi de cealaltă a stratului considerat, a două fascicole de unde care se propagă în direcții paralele şi sunt coerente. Aceste fascicole paralele pot fi concentrate

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 223

Realizând experimental interferența luminii, Thomas Young a adus argumentul decisiv în favoarea ipotezei naturii ondulatorii a fenomenelor luminoase. Utilizând această ipoteză a putut explica culorile care apar la suprafața baloanelor de săpun şi a găsit legătura dintre culoarea luminii şi lungimea de undă. În 1817 a făcut şi ipoteza (confirmată mai apoi) a caracterului transversal al undei luminoase, explicând polarizarea luminii. Ipotezele sale veneau în contradicție cu afirmațiile lui Newton (care considera că lumina este formată dintr-un flux de particule – având deci caracter corpuscular), motiv pentru care au fost tratate multă vreme cu neîncredere de către lumea ştiințifică. Teoria sa a fost în fine acceptată şi ca rezultat al cercetărilor ulterioare făcute de Augustin J. Fresnel şi François Arago, care au confirmat-o.

prin anumite mijloace într-un singur punct, facilitându-se astfel interferența undelor ce le compun.



Să considerăm unda care în punctul **A** se împarte în undele AC şi ADB. Faza undei care ajunge în **C** este :

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{\lambda_1}\right)$$

sau :

$$\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{AC}{c_1 T}\right)$$

Faza undei care ajunge în **B** este :

$$\varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{AD + DB}{\lambda_2}\right) = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{AD + DB}{c_2 T}\right)$$

Diferența de fază are expresia :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{AD + DB}{c_2 T} - \frac{AC}{c_1 T}\right) = \frac{2\pi}{c_1 T}\left[\frac{c_1}{c_2}(AD + DB) - AC\right]$$

Deoarece $c_1 T = \lambda_1$ = lungimea de undă în mediul 1, rezultă :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_1}\left[\frac{c_1}{c_2}(AD + DB) - AC\right]$$

Observăm că :

$$AD = DB = \frac{h}{\cos r}$$

şi că :

$$AC = AB \sin i = 2h\, tg\, r \sin i$$

Deci :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_1}\left(\frac{2c_1 h}{c_2 \cos r} - \frac{2h \sin r \sin i}{\cos r}\right) = \frac{4\pi h c_1}{\lambda_1 c_2 \cos r}\left(1 - \frac{c_2 \sin r \sin i}{c_1}\right)$$

Conform legii refracției :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_1}{c_2}$$

relație care substituită în expresia diferenței de fază conduce la rezultatul :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 224

În optică, echivalentul stratului cu fețe plan – paralele este lama cu fețe plan – paralele. Aceasta este confecționată dintr-un material transparent (de obicei, sticlă optică) şi are calitatea de a fi foarte subțire. Îndreptând spre ea un fascicul paralel de lumină albă şi rotind-o astfel încât să modificăm unghiul de incidență al luminii, observăm că suprafața ei îşi schimbă culoarea în funcție de unghiul de rotație.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{4\pi h c_1}{\lambda_1 c_2 \cos r}\left(1 - \sin^2 r\right) = \frac{4\pi h c_1}{\lambda_1 c_2}\cos r$$

Dacă ținem cont că :

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \frac{c_2^2 \sin^2 i}{c_1^2}}$$

obținem în final :

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{4\pi h}{\lambda_1}\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} - \sin^2 i}$$

Termenul de interferență este proporțional cu :

$$\cos\Delta\varphi = \cos\left(\frac{4\pi h}{\lambda_1}\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} - \sin^2 i}\right)$$

Rezultă că starea de interferență obținută în punctul de concentrare a undelor emergente depinde de valoarea unghiului de incidență. Unghiul de incidență corespunzător formării maximelor de interferență se obține din condiția :

$$\cos\Delta\varphi = 1$$

sau :

$$\frac{4\pi h}{\lambda_1}\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} - \sin^2 i} = 2k\pi \quad ; \quad k \in \mathbf{N}$$

De aici :

$$i_k = \arcsin\left(\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{k^2\lambda_1^2}{4h^2}}\right)$$

Din expresie se observă că ordinul maxim de interferență k_{max} corespunde celui mai mic unghi de incidență. Valorile ordinului de interferență sunt limitate de următoarele condiții :

$$\frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{k^2\lambda_1^2}{4h^2} \geq 0 \Rightarrow k_{max} = \text{parte intreaga}\left(\frac{2hc_1}{\lambda_1 c_2}\right)$$

$$\frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{k^2\lambda_1^2}{4h^2} \leq 1 \Rightarrow k_{min} = \text{parte intreaga}\left(\frac{2h\sqrt{c_1^2/c_2^2 - 1}}{\lambda_1}\right)$$

Numărul de poziții în care poate fi ținut stratul cu fețe plan paralele în raport cu unda incidentă, corespunzător obținerii de maxime de interferență, este :

PROBLEMA DE LA PAGINA 225

Considerați cazul incidenței normale (i = 0) și c_1 = 1,5 c_2. Exprimați în lungimi de undă care trebuie să fie grosimea stratului pentru ca în *interiorul stratului*, la fața care vine în contact cu unda incidentă să se producă un minim de interferență.

$$\Delta k = \text{parte intreaga}\left(\frac{2hc_1}{\lambda_1 c_2}\right) - \text{parte intreaga}\left(\frac{2h\sqrt{c_1^2/c_2^2 - 1}}{\lambda_1}\right)$$

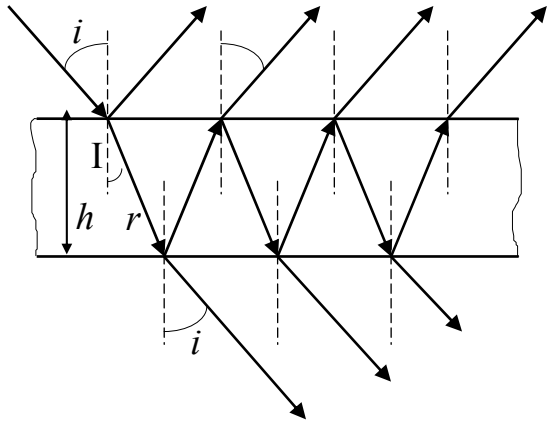
Minimele de interferenţă se obţin dacă :

$$cos\,\Delta\varphi = -1 \Rightarrow \frac{4\pi h}{\lambda_1}\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} - sin^2 i} = (2k+1)\pi \quad ; \quad k \in \mathbf{N}$$

Rezultă :

$$i_k = arcsin\left(\sqrt{\frac{c_1^2}{c_2^2} - \frac{(2k+1)^2\lambda_1^2}{16h^2}}\right)$$

Pentru a determina starea de interferenţă la compunerea undelor reflectate de stratul cu feţe plan paralele se procedează în mod asemănător, ţinându-se seamă şi de faptul că unda incidentă în punctul **I** poate pierde prin reflexia pe un mediu de impedanţă acustică mai mare un drum egal cu o semilungime de undă. Rezultatele obţinute sunt aceleaşi ca în cazul interferenţei undelor transmise, cu singura deosebire că valorile corespunzătoare maximelor trebuie înlocuite cu cele corespunzătoare minimelor şi invers.



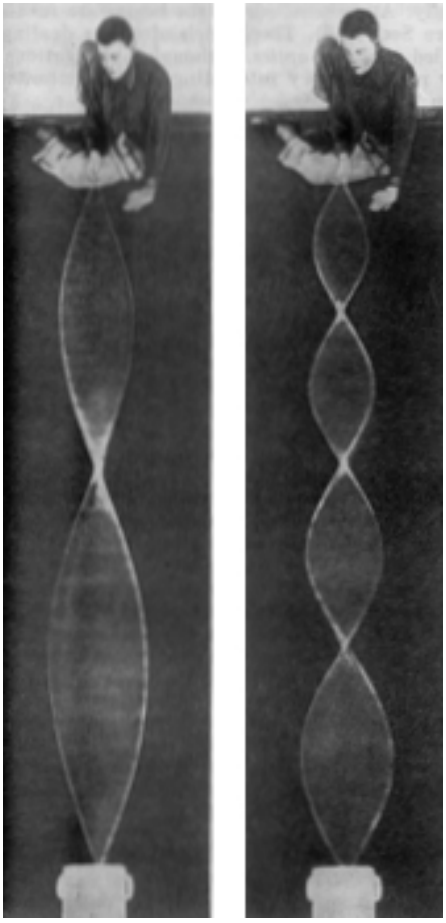
Intensitatea perturbaţiei în punctul de concentrare a undelor reflectate sau refractate depinde de numărul undelor care se întâlnesc acolo, precum şi de coeficienţii de reflexie şi transmisie. Astfel, intensitatea primei unde refractate este $TT'\mathcal{I}$, a celei de-a doua $TR'^2T'\mathcal{I}$, a celei de-a treia $TR'^4T'\mathcal{I}$ ş.a.m.d. Am notat cu T coeficientul de transmisie la faţa superioară a stratului cu feţe plan paralele, cu T' coeficientul de transmisie la faţa inferioară şi cu R' coeficientul de reflexie internă. Valoarea maximă a intensităţii perturbaţiei se obţine dacă numărul undelor din fascicolul refractat este foarte mare şi are expresia :

$$\mathcal{I}_2 = TT'\left(1 + R'^2 + R'^4 + ...\right)\mathcal{I} = \frac{TT'\mathcal{I}}{1 - R'^2}$$

INFORMAŢIA DE LA PAGINA 226

Lama cu feţe plan – paralele poate fi folosită pentru controlul optic al gradului de prelucrare al unor suprafeţe. Prin acest mijloc, se pot pune în evidenţă denivelări de ordinul de mărime al micronului. Denivelările pot fi observate graţie franjelor de interferenţă care se formează. Dacă acestea au un caracter regulat suprafaţa nu prezintă denivelări.

4.5.6.3.3. Unde staționare



În figura alăturată puteți observa formarea undelor staționare în lungul unei coarde vibrante.

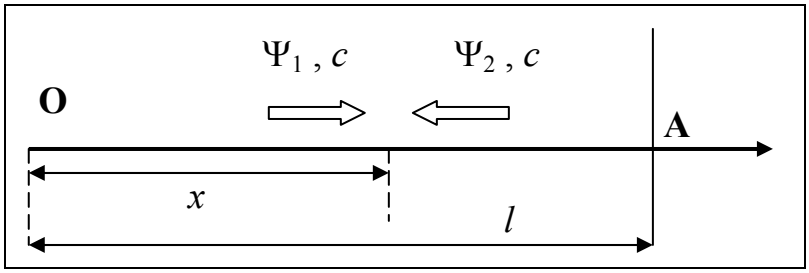
Undele staționare se formează în urma interferenței între două unde care se propagă în aceeaşi direcție, dar în sensuri contrare.

De multe ori, această situație se poate întâlni în urma interferenței între unda directă şi unda reflectată.

În cazul coardei vibrante din figura alăturată, putem întâlni trei situații :

a) Ambele capete ale coardei sunt fixe
b) Unul dintre capete este fix, iar celălalt este liber
c) Ambele capete sunt libere

În general, „capăt fixat” înseamnă reflexia pe un mediu mai dens, care este însoțită de un salt de fază, iar „capăt liber” însemnă reflexia pe un mediu mai puțin dens şi care se face fără modificarea fazei.



Fie undele Ψ_1 şi Ψ_2 care se reflectă fără pierdere de energie în punctele **O** şi **A**. Cele două unde se propagă cu viteze egale şi în sensuri opuse în lungul direcției **OA**. Considerăm un punct, de coordonată x, unde, la momentul t, are loc suprapunerea undelor. Unda directă Ψ_1 este descrisă prin expresia :

$$\Psi_1 = A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 227

Un dispozitiv experimental folosit în acustică şi care utilizează undele staționare este **tubul Kundt**. Acesta este un tub lung, din sticlă, închis la ambele capete şi în interiorul căruia se află un praf fin şi uşor. La unul din capete este montată o sursă de sunet, iar celălalt capăt reflectă sunetul. Vibrațiile aerului din tub pun în mişcare particulele de praf şi le aşează în „grămezi” similare ca înfățişare cu coarda din fotografie.

iar unda reflectată în **O** are expresia :

$$\Psi_2 = A\,sin\left[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}(2l - x) + \varphi_0\right]$$

unde φ_0 este egal cu zero dacă reflexia se face pe un mediu mai puțin dens şi egal cu π radiani dacă reflexia se face pe un mediu mai dens. Drumul parcurs de unda reflectată este calculat ca suma dintre lungimea drumului dus (l) şi lungimea drumului întors (l - x) Considerăm unde transversale, direcțiile oscilațiilor imprimate fiind paralele. În aceste condiții, elongația rezultantă în punctul de coordonată x este egală cu suma elongațiilor produse de cele două unde :

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

Rezultă :

$$\Psi = A\left\{sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + sin\left[\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}(2l - x) + \varphi_0\right]\right\}$$

sau :

$$\Psi = 2A\,cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l - x) - \frac{\varphi_0}{2}\right]sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}l + \frac{\varphi_0}{2}\right)$$

Rezultatul arată că în punctul considerat are loc o oscilație armonică, a cărei amplitudine $2A\,cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l - x) - \frac{\varphi_0}{2}\right]$ depinde de poziția x. În punctul de coordonată $x = l$, amplitudinea oscilației este maximă şi egală cu A dacă $\varphi_0 = 0$, respectiv nulă dacă $\varphi_0 = \pi$.

<u>Cazul a)</u>

În acest caz, amplitudinea oscilațiilor trebuie să fie nulă atât în **O** cât şi în **A**. Condiția ca amplitudinea să se anuleze în **A** este $\varphi_0 = \pi$. În aceste condiții, expresia amplitudinii devine :

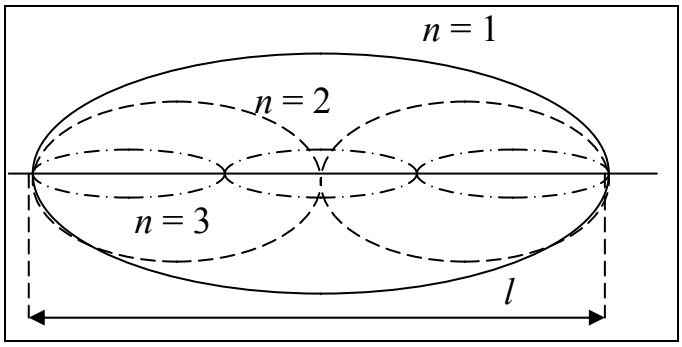
$$A_0 = 2A\,cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l - x) - \frac{\pi}{2}\right] = 2A\,sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l - x)\right]$$

Amplitudinea se anulează şi în **O** (unde $x = 0$) doar dacă este îndeplinită condiția :

$$\frac{2\pi}{\lambda}l = n\pi \quad ; \quad n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad l = n\frac{\lambda_n}{2}$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 228

Unde staționare, sub formă de valuri, pot fi observate şi în bazine acvatice închise (lacuri) sau parțial închise (golfuri, porturi). Asemenea valuri au fost studiate pe lacul Geneva din Elveția. Caracteristica lor este aceea că perioada de oscilație nu depinde de cauza inițială care a perturbat echilibrul masei de apă, dar depinde de dimensiunile bazinului acvatic şi de direcția de propagare a valurilor. Până şi apa Mării Nordului are o perioadă de oscilație de 36 de ore ! Chiar şi acasă puteți obține asemenea valuri într-o tavă de chec umplută parțial cu apă.



În cazul coardei fixate la ambele capete, undele staționare se formează doar dacă lungimea coardei este egală cu un număr întreg de semilungimi de undă : $l = n\frac{\lambda_n}{2}$.

Fiecărei lungimi de undă λ_n îi corespunde o anumită frecvență de oscilație :

$$\lambda_n = cT_n = \frac{c}{\nu_n} \quad \Rightarrow \quad \nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2l}$$

Frecvențele ν_n se numesc **frecvențele proprii de oscilație ale coardei vibrante.** Cea mai joasă dintre aceste frecvențe corespunde lui $n = 1$ şi se numeşte **frecvența fundamentală**.

Conform celor arătate mai sus, amplitudinea oscilație capătă următoarea expresie matematică :

$$\boxed{A_0 = 2A\,sin\left[\frac{2\pi}{\lambda_n}(l-x)\right] = 2A\,sin\left[\pi n\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]}$$

Punctele de pe coardă unde amplitudinea de oscilație este nulă se numesc **noduri** şi corespund condiției :

$$\pi n\left(1-\frac{x}{l}\right) = n'\pi \quad ; \quad n' \in \mathbf{N}\,, n' \le n \quad \Rightarrow \quad x_{n'} = l\left(1-\frac{n'}{n}\right)$$

Distanța între două noduri este :

$$x_{n'} - x_{n'+1} = l\left(1-\frac{n'}{n}-1+\frac{n'+1}{n}\right) = \frac{l}{n} = \frac{\lambda_n}{2}$$

Nodurile undelor staționare sunt echidistante. Distanța între două noduri succesive este egală cu o semilungime de undă.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 229

În cazul unei coarde elastice, viteza de propagare a undelor transversale este proporțională cu radicalul tensiunii din coardă. Crescând tensiunea, viteza de fază creşte, iar frecvențele proprii de oscilație îşi măresc valorile proporțional cu viteza. Acest fapt explică de ce acordarea instrumentelor cu coarde se face prin mărirea sau micşorarea tensiunii din acestea.

Există şi puncte ale coardei care oscilează cu amplitudine maximă. Ele se numesc **ventre** şi sunt poziționate astfel încât este îndeplinită condiția :

$$\pi n\left(1-\frac{x}{l}\right)=(2n'+1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad n'\in \mathbf{N}\,,\, n'\le n \quad \Rightarrow \quad x_{n'}=l\left(1-\frac{2n'+1}{2n}\right)$$

Distanța dintre două ventre succesive este egală tot cu o semilungime de undă. Ca poziție, ventrele se găsesc exact la jumătatea distanței dintre două noduri.

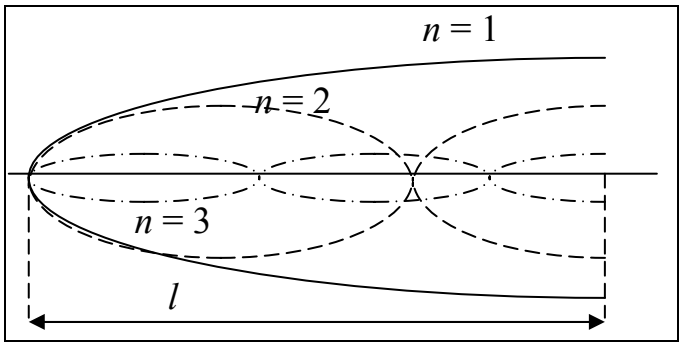
Cazul b)

În acest caz, amplitudinea oscilațiilor trebuie să fie nulă în **A** şi maximă în **O**. Condiția ca amplitudinea să se anuleze în **A** este $\varphi_0 = \pi$. În aceste condiții, expresia amplitudinii devine :

$$A_0=2A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l-x)-\frac{\pi}{2}\right]=2A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l-x)\right]$$

Amplitudinea este maximă în **O** (unde $x = 0$) doar dacă este îndeplinită condiția :

$$\frac{2\pi}{\lambda}l=(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad ; \quad n\in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad l=(2n+1)\frac{\lambda_n}{4}$$



În cazul coardei fixată la un capăt şi liberă la celălalt, undele staționare se formează doar dacă lungimea coardei este egală cu un număr impar de sferturi de lungimi de undă : $l=(2n+1)\frac{\lambda_n}{4}$.

Şi în acest caz fiecărei lungimi de undă λ_n îi corespunde o anumită frecvență de oscilație :

$$\lambda_n=cT_n=\frac{c}{\nu_n} \quad \Rightarrow \quad \nu_n=\frac{c}{\lambda_n}=(2n+1)\frac{c}{4l}$$

Între ventre şi noduri există distanțe similare cu cele din cazul precedent.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 230

Rezonatoarele sau camerele de rezonanță sunt spații închise în care se pot forma unde staționare. În acustică, rolul rezonatorului este acela de a amplifica sunetul. Cutia unei viori este o cavitate rezonantă, dar şi laringele nostru are un asemenea rol. Timbrul unui instrument muzical sau al vocii umane depinde de dimensiunile cavității rezonante.

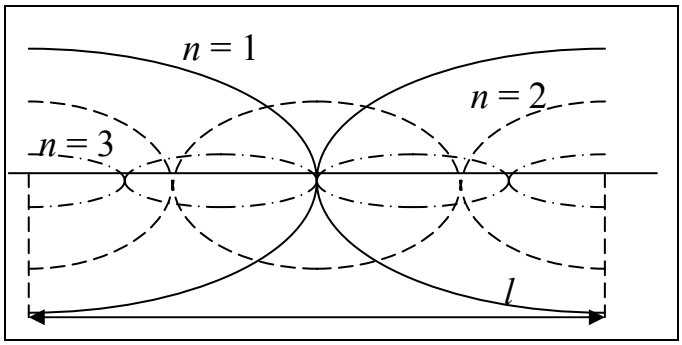
Cazul c)

În acest caz, amplitudinea oscilațiilor trebuie să fie maximă atât în **O** cât şi în **A**. Condiția ca amplitudinea să fie maximă în **A** este $\varphi_0 = 0$. În aceste condiții, expresia amplitudinii devine :

$$A_0 = 2A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(l - x)\right]$$

Amplitudinea este maximă şi în **O** (unde $x = 0$) doar dacă este îndeplinită condiția :

$$\frac{2\pi}{\lambda}l = n\pi \quad ; \quad n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad l = n\frac{\lambda_n}{2}$$



În cazul coardei libere la ambele capete, undele staționare se formează doar dacă lungimea coardei este egală cu un număr întreg de semilungimi de undă : $l = n\frac{\lambda_n}{2}$.

Lungimilor de undă proprii λ_n le corespund frecvențele proprii de oscilație :

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = n\frac{c}{2l}$$

Între ventre şi noduri există distanțe similare cu cele din cazurile precedente.

În final, un comentariu în privința transferului de energie. Dacă amplitudinile celor două unde sunt egale, cum şi vitezele lor de fază sunt egale, rezultă că intensitățile sunt de asemenea egale în modul. Sensurile de propagare fiind opuse, înseamnă că densitatea totală a curentului de energie este nulă. Deci, **în lungul coardei elastice nu se înregistrează un transfer net de energie**. Cu toate acestea, intensitatea perturbației nu se anulează şi ea. Aceasta are valori maxime în punctele corespunzătoare ventrelor şi minime în dreptul nodurilor. **Densitatea de energie nu variază în timp**, ceea ce însemnă că repartiția energiei în acest sistem fizic este **staționară**. De aici vine şi denumirea de unde staționare.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 231

Un aspect curios este faptul că timbrul vocii unei persoane depinde de compoziția aerului pe care-l respiră aceasta. Aşa cum aminteam deja, laringele are rolul unei cavități rezonante. Frecvența fundamentală a vocii noastre depinde de lungimea laringelui şi de viteza de propagare a sunetului (aproximativ 340 m/s). Dacă înlocuim azotul din aer cu heliu, se obține un amestec respirabil (utilizat de scafandri), dar în care viteza sunetului creşte de două - trei ori. Prin urmare, frecvența fundamentală creşte şi ea în acelaşi raport, iar o voce gravă se transformă într-o voce neaşteptat de subțire.

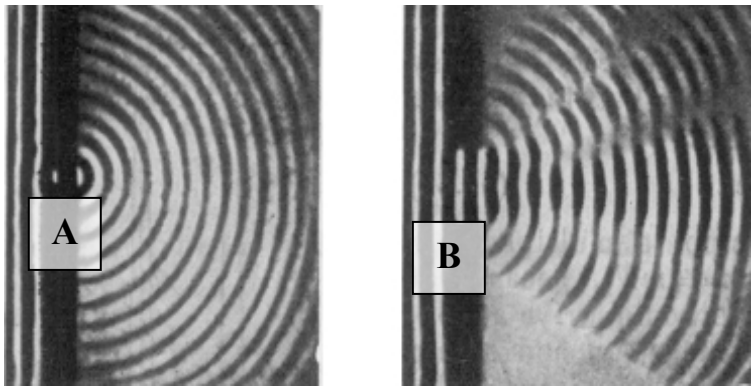
4.5.7.DIFRACȚIA

4.5.7.1. Caracterizarea difracției

Fenomenul de difracție poate fi caracterizat astfel :

❖ Este observabil ca urmare a trecerii undelor prin orificii de mici dimensiuni sau în cazul în care în calea lor se plasează obstacole de mici dimensiuni.

❖ Se manifestă prin aceea că frontul de undă după trecerea de obstacol are dimensiuni mai mari decât ale obstacolului şi se poate constata apariția franjelor de interferență.



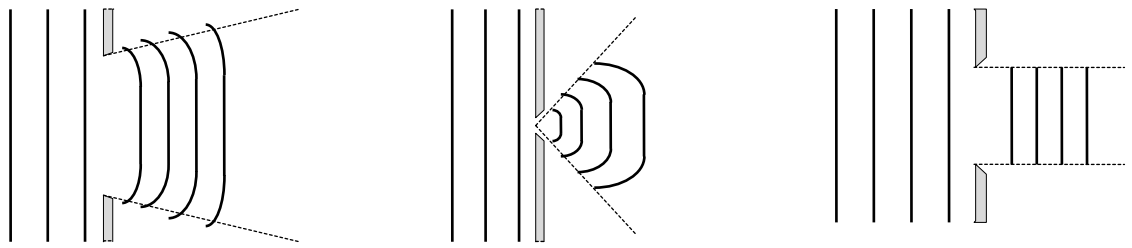
Un exemplu de difracție poate fi văzut în figura alăturată. Este vorba de undele plane transversale de la suprafața unui lichid (le puteți remarca pe latura stângă a celor două imagini) care trec prin orificiile **A** sau **B** (**A** fiind mult mai îngust decât **B**). Se observă că în cazul orificiului mai îngust unda emergentă este aproape o undă circulară. În cazul orificiului mai larg, putem distinge franjele de interferență şi, în plus, sesizăm că undele emergente se împrăştie mai puțin decât în primul caz.

✍ Baza teoretică a explicării fenomenului de difracție este **principiul Huygens-Fresnel**.

După cum se poate vedea din figurile de mai jos, în cazul trecerii unei unde plane printr-un orificiu, principiul lui Huygens permite să ne explicăm de ce efectul de „împrăştiere” produs de difracție este mult mai accentuat dacă orificiul este îngust (cazul B), decât dacă el este larg (cazul A). Comparativ (cazul C) este prezentată propagarea în absența difracției.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 232

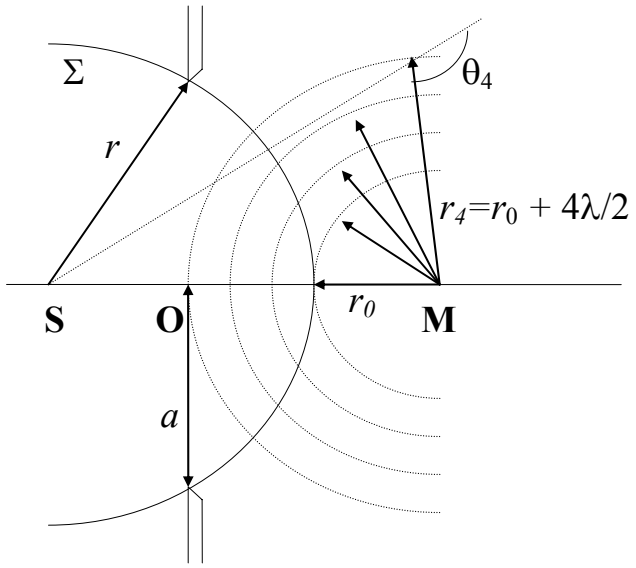
Difracția se produce atât în cursul propagării undelor mecanice, cât şi la propagarea undelor luminoase. Considerațiile expuse în acest capitol se pot aplica integral undelor luminoase şi sunt mai degrabă specifice domeniului opticii ondulatorii, decât domeniului undelor mecanice.



A. Orificiu larg	B. Orificiu îngust	C. Propagare fără difracție

4.5.7.2. Difracția undelor sferice (difracția Fresnel)

Să considerăm următoarea situație :



- ❖ o sursă punctiformă emite unde sferice
- ❖ în calea undelor se interpune un paravan, care are practicat un mic orificiu circular de rază *a* pe care se produce difracția
- ❖ rezultatul difracției se observă într-un punct **M**, coliniar cu sursa **S** şi centrul **O** al orificiului
- ❖ lungimea de undă λ este mult mai mică decât distanțele *r* şi r_0, sau raza *a* a orificiului.

Să considerăm suprafața de undă sferică Σ, tangentă la marginile orificiului. Funcția de undă în punctele aflate pe suprafața Σ are expresia :

$$\Psi(r,t) = \Psi_0 \frac{1}{r} sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\right] = \Psi_\Sigma \, sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)\right]$$

Împărțim suprafața Σ în suprafețele elementare Σ_1, Σ_2, Σ_3,..., trasând sfere centrate în punctul de observație **M**, ale căror raze diferă succesiv prin câte o semilungime de undă. Conform principiului lui Huygens aceste suprafețe elementare (denumite **zone Fresnel**) emit unde coerente ale căror amplitudini sunt proporționale cu ariile S_k ale zonelor. În plus, vom considera că amplitudinea unei unde secundare depinde de un

BIOGRAFIA DE LA PAGINA 233

Augustin-Jean Fresnel (1788-1827). Fizician francez cu contribuții importante în domeniul opticii ondulatorii. A lucrat ca inginer în mai multe departamente ale Franței. Şi-a pierdut slujba după reîntoarcerea lui Napoleon din insula Elba (1814). Se pare că această ocazie a însemnat începutul cercetărilor sale în domeniul opticii. A avut contribuții experimentale, realizând mai multe dispozitive interferențiale. Pe plan teoretic, a utilizat analiza matematică pentru a explica rezultatele experimentale.

factor $f_k(\theta_k)$, care, la rândul său, scade lent în funcție de unghiul θ_k făcut de vectorul de poziție al zonei Fresnel față de sursa **S** şi vectorul ei de poziție față de punctul de observație **M**, anulându-se pentru $\theta = 90°$. Conform acestor afirmații, scriem :

$$\Psi_k = f(\theta_k) S_k \Psi_\Sigma$$

Unda secundară se propagă ca undă sferică, aşa încât pentru punctul **M** este valabilă relația :

$$\Psi_{k,M} = \Psi_k \frac{1}{r_k} sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_k}{\lambda}\right)\right]$$

sau :

$$\Psi_{k,M} = \frac{\Psi_0 S_k f(\theta_k)}{r r_k} sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_k}{\lambda}\right)\right]$$

Oscilația din punctul **M** reprezintă rezultatul compunerii tuturor undelor secundare incidente :

$$\Psi_M = \sum_{k=1}^{n} \Psi_{k,M} = \frac{\Psi_0}{r} \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k f(\theta_k)}{r_k} sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_k}{\lambda}\right)\right]$$

Observăm că potrivit definiției zonelor Fresnel putem scrie :

$$sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_k}{\lambda}\right)\right] = sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + (k-1)\lambda/2}{\lambda}\right)\right] = sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda}\right) - (k-1)\frac{\lambda}{2}\right]$$

sau :

$$sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_k}{\lambda}\right)\right] = (-1)^{k-1} sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda}\right)\right]$$

Rezultă :

$$\Psi_M = \frac{\Psi_0}{r} sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda}\right)\right] \cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{S_k f(\theta_k)}{r_k}$$

Să calculăm suprafața unei zone Fresnel. Se observă cu uşurință că aceasta poate fi aproximată destul de precis ca fiind aria unei coroane circulare, de lățime h_k - h_{k-1} :

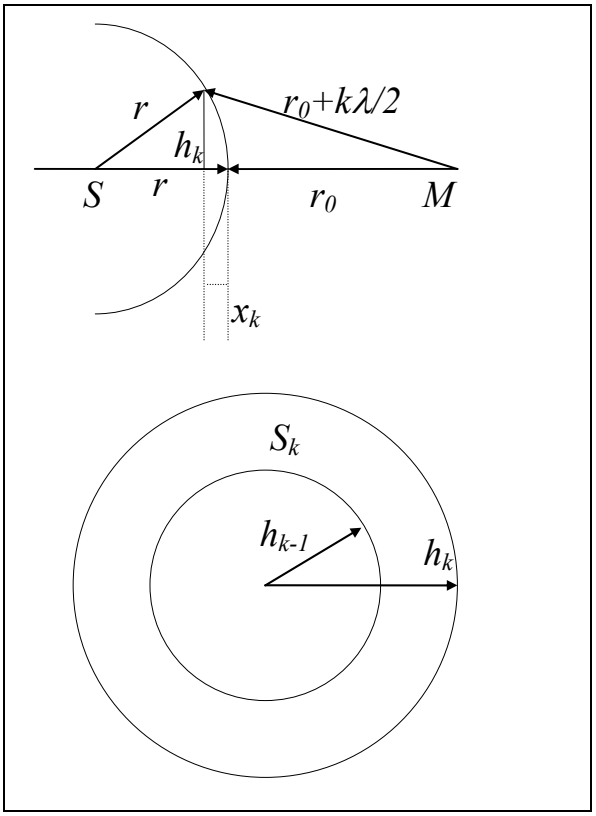
$$S_k = \pi\left(h_k^2 - h_{k-1}^2\right)$$

Dar :

PROVERBUL DE LA PAGINA 234

Nu blestema întunericul – aprinde o lumânare !

Proverb chinezesc



$$\begin{cases} r^2 = (r - x_k)^2 + h_k^2 \\ r_k^2 = (r_0 + x_k)^2 + h_k^2 \end{cases}$$

sau :

$$\begin{cases} r^2 = r^2 - 2rx_k + x_k^2 + h_k^2 \\ r_0^2 + r_0 k\lambda + \dfrac{k^2\lambda^2}{4} = r_0^2 + 2r_0 x_k + x_k^2 + h_k^2 \end{cases}$$

considerând λ, $x_k << r,\ r_0,\ h_k$ rezultă :

$$\begin{cases} 2rx_k \approx h_k^2 \\ 2r_0 x_k \approx r_0 k\lambda - h_k^2 \end{cases}$$

De aici :

$$\frac{r}{r_0} = \frac{h_k^2}{r_0 k\lambda - h_k^2} \quad \Rightarrow \quad h_k^2 = \frac{rr_0 k\lambda}{r + r_0}$$

Aria zonei Fresnel este :

$$S_k = \pi\left[\frac{rr_0 k\lambda}{r + r_0} - \frac{rr_0(k-1)\lambda}{r + r_0}\right] = \frac{\pi rr_0\lambda}{r + r_0}$$

Suprafața zonelor Fresnel este constantă, depinzând doar de lungimea de undă şi distanțele de la orificiu la sursa de oscilații şi de la orificiu la punctul de observație.

Cu acest rezultat, expresia elongației în punctul **M** devine :

$$\Psi_M = \frac{\pi\Psi_0 r_0\lambda}{r + r_0} sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda}\right)\right] \cdot \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{f(\theta_k)}{r_0 + \dfrac{(k-1)\lambda}{2}}$$

Cu aproximația : $r_0 + \dfrac{(k-1)\lambda}{2} \cong r_0$, ne rămâne :

$$\Psi_M = \frac{\pi\Psi_0\lambda}{r + r_0} sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda}\right)\right] \cdot \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} f(\theta_k)$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 235

Difracția este cu atât mai accentuată cu cât dimensiunile obstacolului aflat în calea undei sunt mai apropiate de lungimea de undă. În cazul sunetelor emise de un difuzor, difuzorul însuşi constituie un obstacol. Dacă sunetul este compus dintr-un amestec de unde cu diferite lungimi de undă, difracția este mai pregnantă pentru lungimile de undă mari (respectiv, frecvențele joase). Din acest motiv, stând în „conul de umbră” al difuzorului, nu vom mai percepe un sunet aparent natural, ci un sunet mai artificial, asemănător celui transmis printr-o linie telefonică.

sau :

$$\Psi_M = \frac{\pi\Psi_0\lambda f_1}{r+r_0} sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0}{\lambda}\right)\right]\cdot\left(1-\frac{f_2}{f_1}+\frac{f_3}{f_1}-\frac{f_4}{f_1}+....\right)$$

Intensitatea perturbației în punctul de observație este proporțională cu pătratul amplitudinii undei :

$$\mathcal{I}_M \cong \left(\frac{\pi\Psi_0\lambda f_1}{r+r_0}\right)^2 sin^2\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0}{\lambda}\right)\right]\cdot\left(1-f_{2,1}+f_{3,1}-f_{4,1}+....\right)^2$$

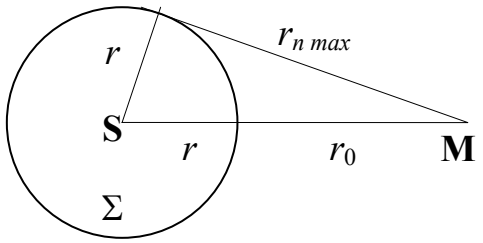
Concluziile sunt următoarele :

❖ Intensitatea perturbației este invers proporțională cu pătratul distanței dintre sursă şi punctul de observație, la fel ca pentru o undă sferică ce s-ar fi propagat fără să întâlnească nici-un obstacol între **S** şi **M**.

❖ Intensitatea perturbației depinde de factorul :

$$F_{1,n} = \left(1-f_{2,1}+f_{3,1}-f_{4,1}+...+(-1)^n f_{n,1}\right)$$

unde $f_{k,1} = f_k/f_1 = f(\theta_k)/f(\theta_1)$.



Deoarece, chiar în absența fantei, r_k nu poate depăşi valoarea $r_{n\,max}$, iar punctele aflate în afara suprafeței de undă Σ nu contribuie la intensitatea perturbației din **M**, rezultă :

$$n < n_{max} = \text{finit}$$

$$fn_{max},\ 1 \rightarrow 0$$

Pe de altă parte, deoarece factorii f_k variază lent, putem face aproximația :

$$f_{k,1} \cong \frac{f_{k-1,1}+f_{k+1,1}}{2} \Rightarrow \frac{f_{k-1,1}-2f_{k,1}+f_{k+1,1}}{2} \cong 0$$

În aceste condiții şi în absența fantei :

$$F_{1,n\,max} = \frac{1}{2}+\frac{1-2f_{2,1}+f_{3,1}}{2}+\frac{f_{3,1}-2f_{4,1}+f_{5,1}}{2}+....+0$$

sau :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 236

Difracția poate avea efecte utile. Emisiunile radio în banda undelor lungi au lungimea de undă de ordinul kilometrului. Difracția lor poate avea loc pe obstacole de acelaşi ordin de mărime. Distanța dintre două dealuri învecinate poate constitui astfel o „fantă” pe care are loc difracția. Efectul este acela că semnalul radio poate fi recepționat şi *în spatele* dealurilor.

$$F_{1,n\ max} \cong \frac{1}{2}$$

Rezultă că factorul F_1, n_{max} reprezintă aproximativ jumătate din contribuția primei zone Fresnel.

Notând cu $\mathcal{I}_{0M}$ intensitatea perturbației din punctul **M** în absența fantei, rezultă :

$$\mathcal{I}_{0M} \cong \frac{1}{4}\left(\frac{\pi\Psi_0\lambda f_1}{r+r_0}\right)^2$$

sau :

$$\frac{\mathcal{I}_M}{\mathcal{I}_{0M}} = 4F_{1,n}$$

Dar :

$$F_{1,2n} = \frac{1}{2} + \frac{1-2f_{2,1}+f_{3,1}}{2} + \ldots + \frac{f_{2n-1,1}-2f_{2n,1}+f_{2n+1,1}}{2} - \frac{f_{2n+1,1}}{2}$$

sau :

$$F_{1,2n} \cong \frac{1}{2}\left(1-f_{2n+1,1}\right) < \frac{1}{2}$$

Analog :

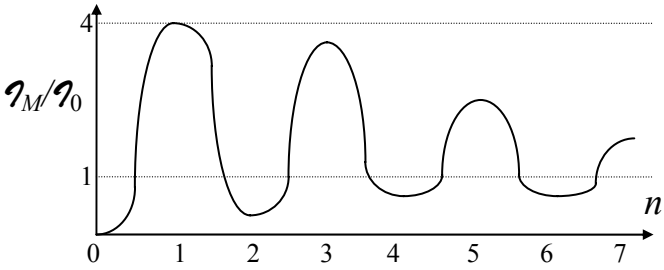
$$F_{1,2n+1} \cong \frac{1}{2}\left(1+f_{2n+1,1}\right) > \frac{1}{2}$$

Cum $f_{2n,1} \cong f_{2n+1,1}$, putem scrie :

$$F_{1,n} \cong \frac{1}{2}\left[1-(-1)^n f_{n,1}\right]$$

sau :

$$\mathcal{I}_{M,n} = \mathcal{I}_{0M}\left[1-(-1)^n f_{n,1}\right]^2$$

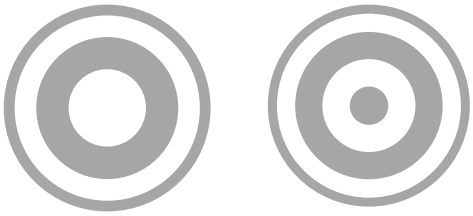


În funcție de numărul de zone Fresnel în care poate fi împărțit orificiul, intensitatea perturbației din punctul **M** variază, având maxime atunci când numărul de zone este impar şi minime pentru un număr par de zone.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 237

Difracția are şi efecte supărătoare. Deşi din punct de vedere tehnic s-ar putea construi microscoape cu putere de rezoluție suficient de mare pentru a vizualiza detalii cu dimensiuni de ordinul zecimii de micron, difracția împiedică observarea detaliilor cu dimensiuni comparabile sau mai mici decât lungimea de undă a luminii (circa jumătate de micron).

Cea mai mare intensitate a perturbației se obține dacă $n = 1$ (adică când orificiul are o deschidere egală cu prima zonă Fresnel) : $\mathcal{I}_{M1} = 4\mathcal{I}_{0M}$. Cea mai mică intensitate a perturbației se obține pentru $n = 2$, când $\mathcal{I}_{M2} \cong 0$.

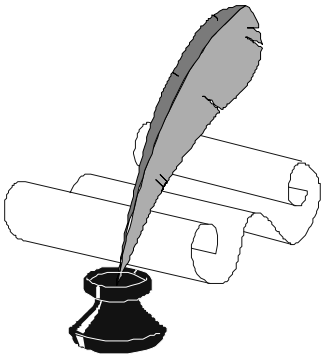


Număr impar de zone Fresnel — Număr par de zone Fresnel

În plan perpendicular pe axa **SM** intensitatea perturbației trece de asemenea prin maxime şi minime. Se obține astfel o figură de interferență cu franje circulare, concentrice. Dacă numărul de zone Fresnel este impar în centrul figurii se găseşte un maxim, iar dacă numărul de zone Fresnel este par, în centru se găseşte un minim.

Atunci când punctul **M** descrie axa **SM**, depărtându-se de sursa **S**, numărul de zone Fresnel cuprinse de orificiu variază, astfel încât intensitatea perturbației se modifică, trecând prin valori maxime şi minime. Prin urmare, orificiul se comportă ca o „lentilă” multifocală. Poziția „focarelor” se poate determina din condiția ca raza orificiului să corespundă unui număr impar de zone Fresnel :

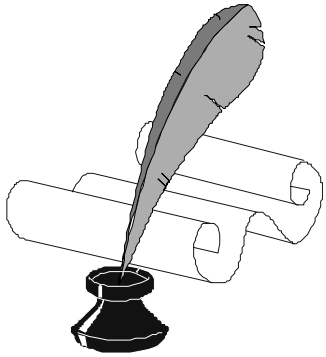
$$a^2 = \frac{rr_0\lambda(2n+1)}{r+r_0} \quad \Rightarrow \quad r_n = \frac{r_0}{\frac{(2n+1)\lambda r_0}{a^2} - 1}$$



Uneori suntem tentați să credem că propagarea unor unde se face sub formă de „raze”, cel mai obişnuit exemplu fiind razele de lumină. Şi ultrasunetele se bucură de o proprietate asemănătoare. Considerentele prezentate în acest subcapitol ne permit să înțelegem mai bine noțiunea de „rază”. Aşa cum am arătat intensitatea perturbației are aceeaşi valoare în punctul **M** atât în cazul în care în calea undei nu există nici-un obstacol, cât şi dacă orificiul din paravan are o suprafață egală cu jumătate din aria primei zone Fresnel. Luând $r = r_0 = 3{,}4$ m, $c = 340$ m/s şi $\nu = 1$ MHz, diametrul orificiului este :

$$d = 2\sqrt{\frac{1}{2}\frac{S_1}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{rr_0\lambda}{2(r+r_0)}} = 2\sqrt{\frac{rr_0c}{2\nu(r+r_0)}} \cong 8{,}5 \text{ mm}$$

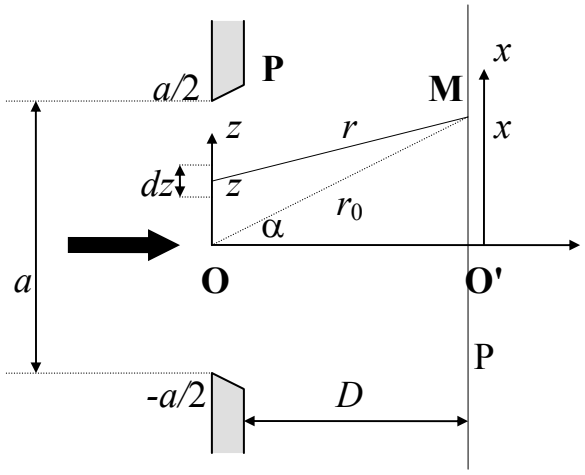
Această valoare poate fi considerată ca diametrul „razei ultrasonore”, adică diametrul „canalului” prin care energia sonoră se transmite de la sursă în punctul de observație.



INFORMAȚIA DE LA PAGINA 238

Dacă priviți farurile unui automobil, puteți observa că ele nu sunt asemănătoare unui simplu geam de sticlă, ci prezintă o serie de striațiuni, care-l fac oarecum opac. Dacă vă miră că proiectantul pare să se „împotrivească” trecerii luminii prin suprafața farului, greşiți ! Striațiunile obturează zonele Fresnel pare şi contribuie la focalizarea luminii la o anumită distanță în fața automobilului.

4.5.7.3. Difracţia undelor plane (difracţia Fraunhofer)



Fie o undă care întâlneşte un paravan **P**, perpendicular pe direcţia sa de propagare. În paravan este practicată o deschidere îngustă, dreptunghiulară. Înălţimea acestei deschideri are valoarea a. În spatele paravanului, la distanţa D se află un plan de observaţie **P**.

Deschiderea fantei este mult mai mică decât distanţa între paravan şi planul **P**, $a << D$, dar depăşeşte mult în mărime lungimea de undă λ. Datorită valorii mari a distanţei D, în locul în care se află planul **P**, undele secundare emise de elementele de suprafaţă ale fantei pot fi considerate unde plane.

Vom discuta mai întâi undele secundare generate de o fâşie de înălţime dz a fantei, aflată la distanţa z de centrul acesteia. Conform principiului Huygens-Fresnel, amplitudinea undei secundare este proporţională cu aria suprafeţei elementare ce o generează :

$$A = A_0 l dz f$$

unde: - A_0 este amplitudinea undei plane ce ajunge la fantă
- l este lungimea fantei
- dz este înălţimea elementului de suprafaţă
- f este un factor de proporţionalitate a cărui valoare poate fi considerată egală pentru toate undele secundare emise în spaţiul fantei.

Contribuţia acestei unde secundare în punctul **M** este :

$$d\Psi_M = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) = A_0 l f \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) dz$$

Observăm că :

$$r^2 = D^2 + (x - z)^2 = D^2 + x^2 - 2xz + z^2 = r_0^2 - 2xz + z^2$$

Considerând $z^2 << x^2, D^2$ rezultă :

BIOGRAFIA DE LA PAGINA 239

Joseph von Fraunhofer (1787 – 1826). Fizician german care a avut contribuţii la dezvoltarea ştiinţei spectroscopiei. A studiat liniile negre care apar în spectrul Soarelui (liniile Fraunhofer). Acestea se datorează absorbţiei unor anumite radiaţii din spectrul Soarelui de către atmosfera Pământului. Experimental, a urmărit fabricarea de sticle optice de calitate, a îmbunătăţit metodele de şlefuire a lentilelor şi a construit numeroase aparate optice. A lucrat la Untzschneider Optical Institute din Benedictbeuern. Ajunge membru al Academiei de Ştiinţe din Munchen.

$$r^2 \cong r_0^2 - 2xz \quad \Rightarrow \quad r = r_0\sqrt{1-\frac{2xz}{r_0^2}}$$

Deoarece $xz << r_0^2$ se pot face aproximațiile :

$$r \cong r_0\left(1-\frac{xz}{r_0^2}\right) = r_0 - \frac{x}{r_0}z = r_0 - z\,sin\,\alpha$$

În aceste condiții :

$$d\Psi_M = A_0 l f\, sin\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \frac{z\,sin\,\alpha}{\lambda}\right)dz$$

Ca rezultat al interferenței tuturor undelor secundare, elongația oscilației în punctul **M** este :

$$\Psi_M = \int_{-a/2}^{a/2} A_0 l f\, sin\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \frac{z\,sin\,\alpha}{\lambda}\right)dz$$

Prin integrare se obține :

$$\Psi_M = -A_0 l f \frac{\lambda}{2\pi\, sin\,\alpha} cos\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \frac{z\,sin\,\alpha}{\lambda}\right)\Bigg|_{-a/2}^{a/2}$$

$$\Psi_M = \frac{A_0 l f \lambda}{2\pi\, sin\,\alpha}\left[cos\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda} - \frac{a\,sin\,\alpha}{2\lambda}\right) - cos\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \frac{a\,sin\,\alpha}{2\lambda}\right)\right]$$

$$\Psi_M = \frac{A_0 l f \lambda}{\pi\, sin\,\alpha} sin\left(\frac{\pi a\, sin\,\alpha}{\lambda}\right) sin\, 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda}\right)$$

Amplitudinea oscilației din **M** este :

$$\boxed{A_M = \frac{A_0 l f \lambda}{\pi\, sin\,\alpha} sin\left(\frac{\pi a\, sin\,\alpha}{\lambda}\right)}$$

Intensitatea perturbației în punctul **M** este proporțională cu pătratul amplitudinii de oscilație :

$$\mathcal{I}_M \sim \left(\frac{A_0 l f \lambda}{\pi\, sin\,\alpha}\right)^2 sin^2\left(\frac{\pi a\, sin\,\alpha}{\lambda}\right)$$

Notând cu $\mathcal{I}_0$ intensitatea perturbației în punctul **O'**, se obține :

$$\mathcal{I}_0 \sim \lim_{\alpha\to 0}\left(A_0 l f a\right)^2\left[\frac{\lambda}{\pi a\, sin\,\alpha} sin\left(\frac{\pi a\, sin\,\alpha}{\lambda}\right)\right]^2 = \left(A_0 l f a\right)^2$$

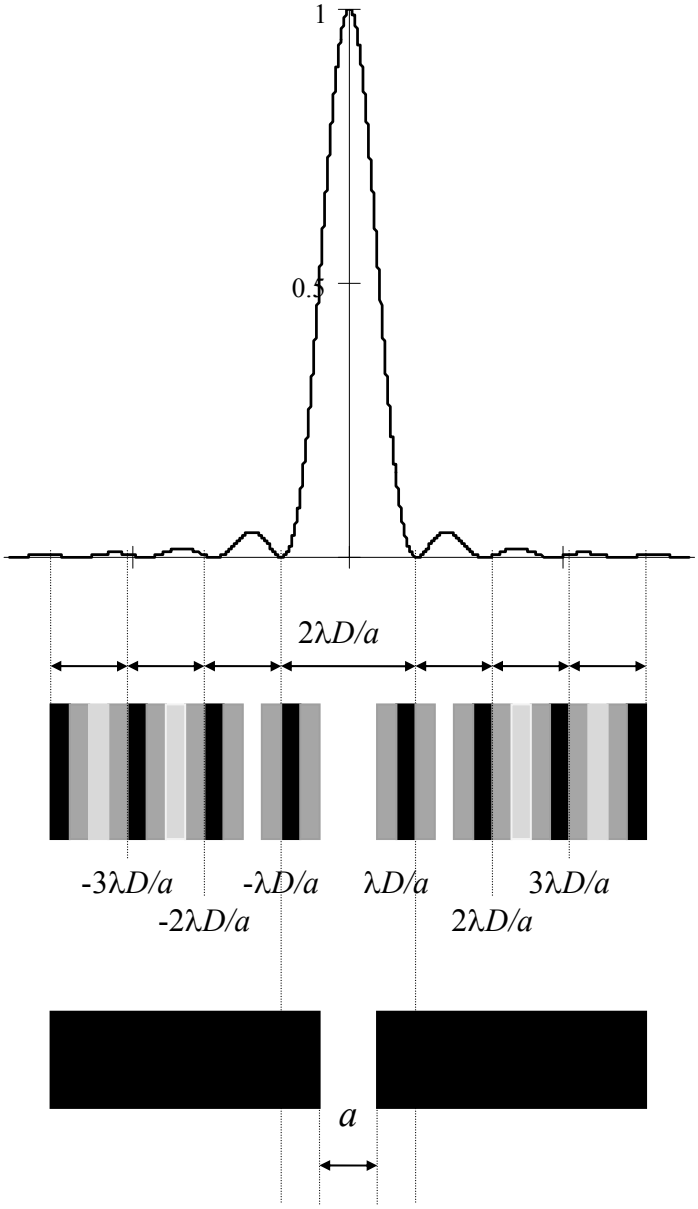
PRECIZAREA DE LA PAGINA 240

Pentru a calcula limita de mai sus am recurs la formula :

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\,x}{x} = 1$$

Rezultă :

$$\frac{\mathcal{I}_M}{\mathcal{I}_0} = \left(\frac{\lambda}{\pi a \sin\alpha}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi a \sin\alpha}{\lambda}\right)$$



Având în vedere că :

$$\sin\alpha = \frac{x}{r_0} \cong \frac{x}{D}$$

putem scrie în final expresia intensității perturbației la distanța x de centrul planului de observație :

$$\mathcal{I}_M = \mathcal{I}_0 \left(\frac{\sin\frac{\pi a x}{\lambda D}}{\frac{\pi a x}{\lambda D}}\right)^2$$

Reprezentând grafic raportul $\mathcal{I}_M/\mathcal{I}_0$ se observă că intensitatea perturbației este maximă în punctul **O'**. Pe măsură ce distanța x față de punctul **O'** crește, intensitatea perturbației variază periodic şi este caracterizată de prezența maximelor şi minimelor. Maximul central este de două ori mai lat decât maximele secundare. Intensitatea din punctele de maxim scade invers proporțional cu x^2, ceea ce face observabile doar un mic număr de franje de difracție secundare.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 241

Spectroscopia optică urmăreşte descompunerea luminii în culorile componente. În studiile sale de optică, Newton a obținut spectrul luminii solare utilizând dispersia luminii în prisme de sticlă. Fraunhofer s-a folosit de **rețelele de difracție**, care constau din succesiunea în număr foarte mare de fante transparente şi obstacole opace liniare, subțiri şi echidistante.

Rezultatul difracției este net diferit de ceea ce ar trebui să se observe în planul **P** dacă unda s-ar propaga în linie dreaptă, şi anume o distribuție constantă a intensității de perturbație într-o zonă centrată în **O'** şi de lățime *a*.

Poziția minimelor de perturbație corespunde condiției :

$$sin^2 \frac{\pi a x}{\lambda D} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = k\frac{\lambda D}{a}\,;\, k \in \mathbf{Z} / \{0\}$$

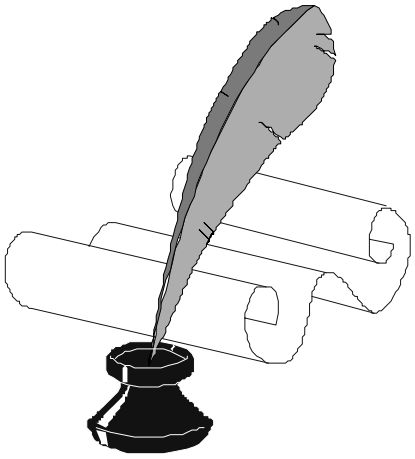
iar poziția maximelor secundare corespunde condiției :

$$sin^2 \frac{\pi a x}{\lambda D} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_k = (2k+1)\frac{\lambda D}{2a}\,;\, k \in \mathbf{Z}$$

Distanța dintre două minime sau două maxime consecutive (interfranja), este :

$$i = x_{k+1} - x_k = (k+1)\frac{\lambda D}{a} - k\frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda D}{a}$$

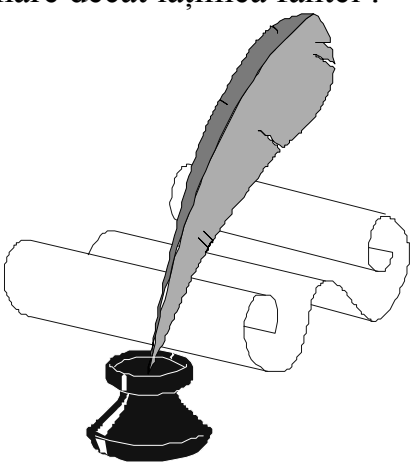
Rezultă că franjele de difracție sunt paralele şi echidistante.



Analiza teoretică pe care am făcut-o acestui tip de difracție ne permite să precizăm mai clar ce înseamnă afirmația : „difracția se produce atunci când unda întâlneşte obstacole de mici dimensiuni".

Problema constă în a preciza ce înseamnă termenul „mici dimensiuni". Pentru a răspunde vom observa mai întâi că difracția devine evidentă atunci când lățimea maximului central este mai mare decât lățimea fantei :

$$2\frac{\lambda D}{a} > a \quad \Rightarrow \quad a < \sqrt{2\lambda D} = \sqrt{\frac{2cD}{\nu}}$$



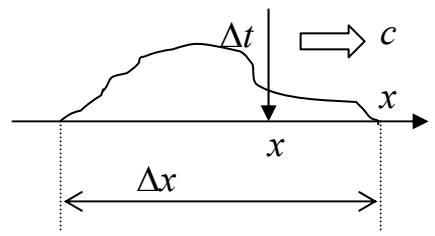
Rezultă că **pentru a observa fenomenul de difracție dimensiunea obstacolului trebuie să fie mai mică decât media geometrică dintre lungimea de undă şi distanța până la punctul de observare**. În cazul unui ultrasunet cu λ = 0,34 mm, pentru D = 1,7 m, rezultă :

$$a < \sqrt{2 \cdot 0{,}34 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}7} = 34\,\text{mm}$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 242

O aplicație practică a difracției, cunoscută încă din antichitate, este camera obscură. Aceasta este o incintă cu pereți înnegriți, prevăzută cu un orificiu circular, de mici dimensiuni. Ca rezultat al difracției luminii, pe peretele opus orificiului (singurul alb) se formează imaginea răsturnată a peisajului din exterior. Camera obscură a folosit pictorilor care trasau contururile imaginii, dar şi la observarea eclipselor de Soare fără pericol de vătămare a ochilor. Numele de cameră obscură este folosit şi astăzi pentru aparatele de fotografiat, dar la acestea micul orificiu care facilita difracția a fost înlocuit prin lentila obiectiv.

4.5.8. DISPERSIA UNDELOR



Perturbaţie naturală

Perturbaţiile care se produc în mod natural într-un mediu elastic au calitatea de a fi procese bine limitate în timp şi spaţiu. Astfel, după cum se poate vedea în figura alăturată, starea de perturbare durează un interval de timp Δt într-un punct de coordonată x, iar extinderea spaţială a câmpului de perturbaţie este Δx.

Fără îndoială, expresia matematică a funcţiei de undă corespunzătoare propagării acestei perturbaţii nu este deloc simplă. În matematică, prin analiză Fourier se arată că expresia matematică a funcţiei de undă care caracterizează o perturbaţie periodică se poate scrie ca o suprapunere de unde armonice plane, numită serie Fourier, având forma :

$$\Psi(x,t) = A_0 + \sum_j A_j \, sin\left(j\omega_0 t - k_j x + \varphi_j\right) \quad ; \quad j \in \mathbf{N}$$

unde ω_0 este pulsaţia armonicei fundamentale (corespunzătoare lui $j = 1$), iar k_j sunt numerele de undă asociate armonicei fundamentale (pentru $j = 1$) şi armonicelor de ordin superior ($j = 2,3\ldots$).

Expresia matematică a funcţiei de undă care caracterizează o **perturbaţie neperiodică** se poate scrie ca o suprapunere de unde armonice plane, numită **integrală Fourier**, având forma :

$$\boxed{\Psi(x,t) = \int A(\omega) sin(\omega t - k(\omega)x) d\omega}$$

Aceste compuneri de unde plane armonice se mai numesc **pachete de unde** sau **trenuri de unde**.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 243

Aducem aici pentru prima oară în discuţie faptul că fenomenele ondulatorii sunt caracterizate de extinderi spaţiale sau temporale limitate. Până în acest punct nu am luat în considerare acest aspect. Am greşit oare ? Răspunsul este unul nuanţat : pentru a putea descrie matematic un proces real, trebuie făcute anumite simplificări sau idealizări. Acestea pot afecta mai mult sau mai puţin exactitatea rezultatului. De exemplu, dacă scara de timp asociată unui fenomen (cum ar fi perioada oscilaţiei) este foarte mică comparativ cu durata procesului ondulatoriu, putem neglija fără a greşi prea mult faptul că acesta are totuşi o extindere temporală limitată.

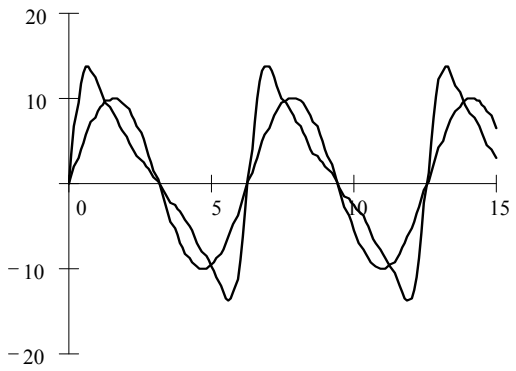
În funcție de ponderea pe care o dețin amplitudinile în seria sau suma Fourier, funcția de undă poate avea forme diferite. Pentru a exemplificare, să compunem oscilația fundamentală :

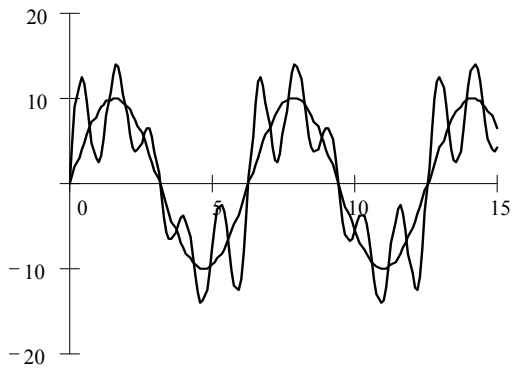
$$y = 10{,}000 \sin t$$

(corespunzând punctului de coordonată $x = 0$) cu oscilațiile :

$y_1 = 5{,}000 \sin 2t$	$z_1 = 0{,}625 \sin 2t$
$y_2 = 2{,}500 \sin 3t$	$z_2 = 1{,}250 \sin 3t$
$y_3 = 1{,}250 \sin 4t$	$z_3 = 2{,}500 \sin 4t$
$y_4 = 0{,}625 \sin 5t$	$z_4 = 5{,}000 \sin 5t$

obținând următoarele reprezentări grafice (curba punctată este armonica fundamentală) :





Exemplu de compunere Fourier a undelor plane armonice

Se observă că deşi pulsațiile oscilațiilor care alcătuiesc perturbația complexă sunt aceleaşi, rezultatul compunerii acestora este complet diferit, depinzând de amplitudinile armonicelor. Mai trebuie remarcat că forma perturbației rezultante este o funcție periodică de timp, perioada fiind egală cu perioada armonicei fundamentale.

Datele experimentale arată că, în general, viteza de fază a unei unde plane armonice poate depinde de frecvența sau pulsația undei. Dependența vitezei de fază a unei unde de frecvența sau pulsația sa se numeşte **dispersie**. Gradul în care această dependență este mai mare sau mai mică este funcție de natura mediului prin care se propagă unda.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 244

De exemplu, în apă, viteza de fază a luminii roşii (λ = 671 nm) este de 225564 km/s, iar viteza de fază a luminii violete (λ = 405 nm) este de 223880 km/s. Aceasta înseamnă că dacă două semnale luminoase, unul roşu şi celălalt violet, ar fi emise simultan, după o secundă de propagare semnalul roşu ar ajunge cu aproape 2000 km mai departe decât cel violet.

Dispersia are consecințe asupra formei pachetelor de unde. Numărul de undă k depinde de viteza de fază :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c(\omega)T} = \frac{\omega}{c(\omega)}$$

Într-un punct de coordonată x_0, armonica de ordinul j are expresia :

$$y_j = A_j \sin(j\omega t - k_j x_0) = A_j \sin\left(j\omega t - \frac{j\omega}{c(j\omega)} x_0\right) = A_j \sin j\omega\left(t - \frac{x_0}{c(j\omega)}\right)$$

sau :

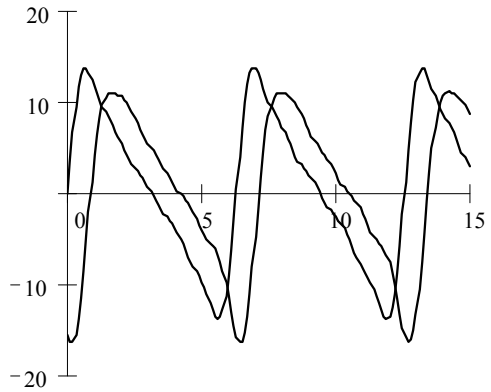
$$y_j = A_j \sin j\omega(t - \tau(j))$$

rezultând că faza inițială depinde de valoarea lui j. Aceasta înseamnă că oscilațiile care compun pachetul de unde vor avea în punctul de coordonată x_0 faze inițiale diferite, chiar dacă în punctul de coordonată 0 fazele lor inițiale erau egale.

Pentru exemplificare, să reluăm unul dintre exemplele precedente şi să vedem care este rezultatul dispersiei asupra formei pachetului de unde. Cu datele :

În punctul de coordonată 0	*În punctul de coordonată* x_0
$y_0 = 10{,}000 \sin t$	$z_0 = 10{,}000 \sin (t - 1{,}0)$
$y_1 = 5{,}000 \sin 2t$	$z_1 = 5{,}000 \sin 2(t - 0{,}9)$
$y_2 = 2{,}500 \sin 3t$	$z_2 = 2{,}500 \sin 3(t - 0{,}8)$
$y_3 = 1{,}250 \sin 4t$	$z_3 = 1{,}250 \sin 4(t - 0{,}7)$
$y_4 = 0{,}625 \sin 5t$	$z_4 = 0{,}625 \sin 5(t - 0{,}6)$

graficul alăturat ne oferă forma pachetului de unde în punctul de coordonată x_0 (linia continuă) sau în punctul de coordonată 0 (linia punctată). Se remarcă că deşi perioada oscilației este aceeaşi în ambele cazuri, forma pachetului de unde este diferită.



Exemplu de efect al dispersiei undelor

Dacă fiecare undă componentă a pachetului de unde are altă viteză de fază, ce mai înseamnă oare „viteza de propagare a perturbației” ? Noțiunea care se folosește în acest caz este aceea de **viteză de grup**.

COMENTARIUL DE LA PAGINA 245

O imagine intuitivă a dispersiei este aceea a cicliştilor care participă la o cursă. La start, „pachetul” de ciclişti este compact. Pe parcursul cursei acesta se destramă. Viteza unui ciclist individual este echivalentul vitezei de fază, iar viteza plutonului este echivalentă vitezei de grup.

✍ Viteza de grup este viteza cu care se propagă maximul rezultantei obținute prin compunerea undelor plane care alcătuiesc pachetul de unde.

În continuare vom încerca să găsim relația matematică între viteza de grup a unui pachet de unde şi vitezele de fază ale undelor componente. Pentru aceasta vom considera cel mai simplu pachet de unde posibil, format din două unde plane armonice având aceeaşi amplitudine şi pulsații uşor diferite :

$$\Psi = A\,sin\left[(\omega_0 - \delta\omega)t - k(\omega_0 - \delta\omega)x\right] + A\,sin\left[(\omega_0 + \delta\omega)t - k(\omega_0 + \delta\omega)x\right]$$

unde $\delta\omega << \omega_0$. Prin transformarea sumei de sinuşi în produs, se obține

$$\Psi = 2A\,cos\left[\delta\omega t - \frac{k(\omega_0 + \delta\omega) - k(\omega_0 - \delta\omega)}{2}x\right] sin\left[\omega_0 t - \frac{k(\omega_0 + \delta\omega) - k(\omega_0 - \delta\omega)}{2}x\right]$$

Ținând cont de dezvoltările în serie Taylor :

$$k(\omega_0 + \delta\omega) \cong k(\omega_0) + \left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} \delta\omega$$

$$k(\omega_0 - \delta\omega) \cong k(\omega_0) - \left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} \delta\omega$$

mai putem scrie :

$$\Psi = 2A\,cos\,\delta\omega\left(t - \left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} x\right) sin(\omega_0 t - k(\omega_0)x)$$

Această expresie este echivalentă unei unde plane :

$$\Psi = \mathcal{A}(x,t)\,sin(\omega_0 t - k(\omega_0)x)$$

a cărei amplitudine :

$$\mathcal{A}(x,t) = 2A\,cos\,\delta\omega\left(t - \left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} x\right)$$

depinde de momentul de timp şi de poziție. Faza amplitudinii este :

$$\Phi = \delta\omega\left(t - \left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} x\right)$$

Să presupunem că luăm în considerare un moment de timp ulterior *t*' şi un alt punct din spațiu *x*', cu condiția ca faza să nu-şi modifice valoarea :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 246

În cursul propagării unui semnal, dispersia afectează forma acestuia. Un cuvânt este şi el un semnal, care poate fi vizualizat pe ecranul unui osciloscop sub forma unei curbe caracteristice. Centrul auditiv din creier procesează acest semnal şi identifică cuvântul, făcând astfel diferența între acesta şi un simplu zgomot. La distanță mare de sursă, prin dispersie, forma semnalului auditiv se modifică şi există posibilitatea ca centrul auditiv să nu mai recunoască cuvântul, receptându-l ca un simplu zgomot, sau ca pe un cuvânt dintr-o limbă străină.

$$\Phi = \delta\omega\left(t' - \left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} x' \right)$$

Fazele fiind egale, amplitudinile pachetului de unde în cele două situații sunt de asemenea egale. Putem spune în acest caz că pachetul de unde s-a propagat din punctul de coordonată x în punctul de coordonată x'. Putem scrie :

$$t - \left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} x = t' - \left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} x' \quad \Rightarrow \quad (x'-x)\left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} = t'-t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0}}$$

Pentru că raportul $\Delta x/\Delta t$ are semnificația unei viteze, care este chiar **viteza de grup**, mai rezultă :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk(\omega)}$$

Ştiind că :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$$

şi că :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{cT} = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda + \frac{2\pi}{\lambda} dc$$

şi înlocuind în expresia vitezei de grup, mai rezultă :

$$v_g = \frac{-\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda + \frac{2\pi}{\lambda} dc}{-\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda}$$

Sau :

$$\boxed{v_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}}$$

Relația lui Rayleigh între viteza de grup şi viteza de fază

Aceasta este relația de legătură între viteza de grup a unui pachet de unde şi viteza de fază. Ea poartă numele de **relația lui Rayleigh**, şi caracterizează mediile dispersive în care viteza de fază a unei unde plane armonice depinde de lungimea de undă a aceleiaşi unde.

BIOGRAFIA DE LA PAGINA 247

John William Strutt Rayleigh, al treilea baron de Terling Place (1842 – 1919). Fizician englez, care a făcut descoperiri importante în domeniile acusticii şi opticii. Acestea se constituie ca bază a teoriei propagării undelor în fluide. A explicat de ce cerul are culoare albastră, ca urmare a dispersiei luminii pe impuritățile din atmosferă. A primit premiul Nobel pentru fizică în 1904 pentru descoperirea şi izolarea argonului. A fost profesor de fizică experimentală la Cambridge, succesor al lui Maxwell. În 1905 a fost ales preşedinte al Royal Society.

În mediile numite **nedispersive**, **viteza de fază nu depinde de lungimea de undă** ($dc/d\lambda = 0$) astfel încât viteza de grup este egală cu viteza de fază. În asemenea medii **forma perturbației nu se modifică** în cursul propagării prin mediu.

✍ O ultimă remarcă este aceea că **vitezele de fază nu pot fi măsurate**. **Experimental se poate măsura doar viteza de grup cu care se propagă perturbația**.

4.5.8.1. Relațiile de incertitudine

Discutam la începutul acestui subcapitol despre cel mai simplu pachet de unde, descris de relația :

$$\Psi = 2A\cos\delta\omega\left(t - \left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} x\right)\sin(\omega_0 t - k(\omega_0)x)$$

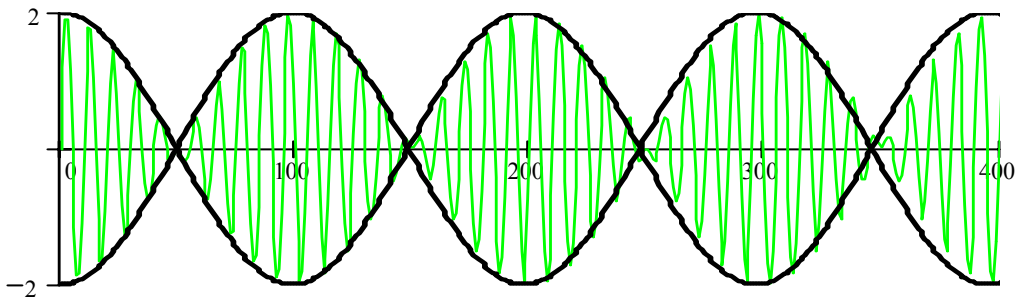
La un moment de timp dat, să spunem $t = 0$, ecuația pachetului de unde este :

$$\Psi = -2A\cos\left(\delta\omega\left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} x\right)\sin(k(\omega_0)x)$$

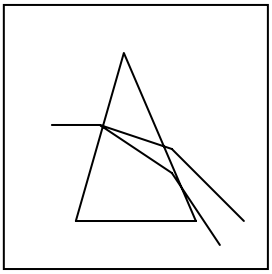
Amplitudinea pachetului de unde este :

$$\mathcal{A}(x) = -2A\cos\left(\delta\omega\left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} x\right)$$

Reprezentările grafice ale funcției de undă şi ale amplitudinii, în funcție de distanța x sunt redate mai jos :

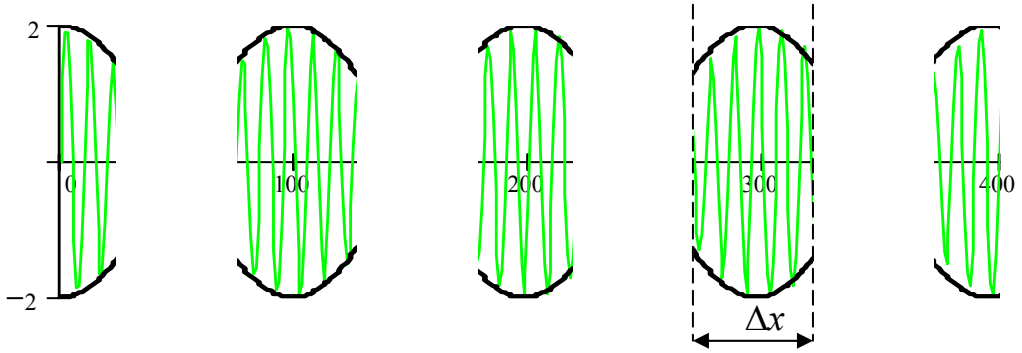


INFORMAȚIA DE LA PAGINA 248



Legea refracției arată că unghiul de refracție depinde de unghiul de incidență, dar şi de vitezele de propagare ale undei în cele două medii. Dispersia face ca razele de lumină de diverse culori care sosesc pe o suprafață sub acelaşi unghi de incidență să aibă unghiuri de refracție diferite şi, astfel, să se separe. Acesta este motivul pentru care un corp prismatic (cum ar fi un diamant şlefuit) descompune lumina în culorile componente.

Dacă acest pachet de unde ar corespunde unui sunet, nici urechea noastră şi nici aparatele de măsură nu ar putea să perceapă variaţia continuă a intensităţii. Sub un anumit prag, atât urechea cât şi aparatele de măsură nu ar mai sesiza prezenţa sunetului. Să presupunem că acest prag corespunde unei amplitudini egale cu o treime din amplitudinea maximă (ceea ce înseamnă o intensitate a perturbaţiei de aproape zece ori mai mică decât intensitatea maximă, deoarece intensitatea perturbaţiei este proporţională cu pătratul amplitudinii). În acest caz, semnalul perceput ar putea fi reprezentat grafic după cum urmează :



Nu mai avem de-a face acum cu o undă nelocalizată în timp şi spaţiu, ci cu o serie periodică de perturbaţii limitate în timp şi spaţiu (aşa cum sunt veritabilele perturbaţii). Întinderea spaţială a perturbaţiei se poate calcula din condiţia :

$$\left|\mathcal{A}(x)\right| = \frac{1}{3}A_{max} = 2A\cos\left(\delta\omega\left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0} x\right)$$

Notând $\Delta k = \delta\omega\left.\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega_0}$ şi ţinând cont că $A_{max} = 2A$ rezultă ecuaţia :

$$\cos(\Delta k\, x) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 \cong \dfrac{0{,}84\,\text{rad}}{\Delta k} \\ x_2 \cong \dfrac{2{,}20\,\text{rad}}{\Delta k} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{1{,}36\,\text{rad}}{\Delta k}$$

sau :

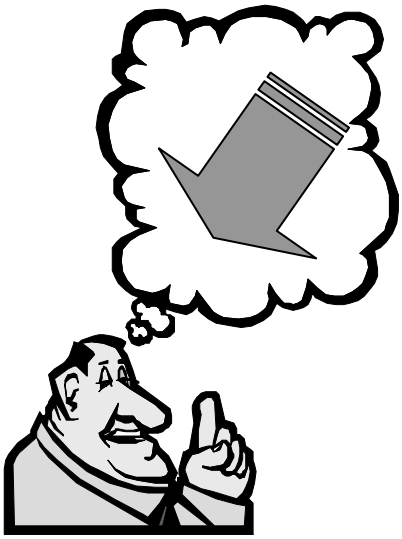
$$\boxed{\Delta x \Delta k > 1}$$

Relaţia de incertitudine poziţie – număr de unde

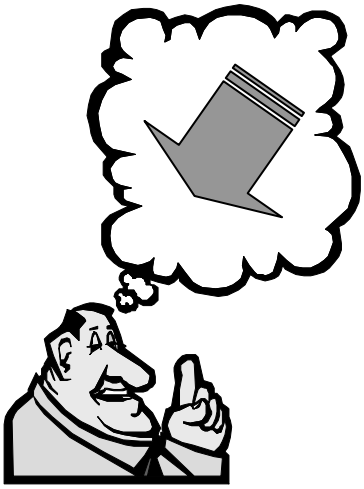
INFORMAŢIA DE LA PAGINA 249

Relaţiile de incertitudine joacă un rol extrem de important în mecanica cuantică. Acolo, microparticulele nu se mai supun legilor mecanicii clasice şi sunt tratate ca unde de probabilitate, ceea ce conferă, spre deosebire de mecanica clasică, un caracter nedetermist evoluţiei sistemelor fizice compuse din asemenea microparticule.

CARE ESTE SEMNIFICAȚIA RELAȚIEI DE INCERTITUDINE ?



Pachetul de unde este o suprapunere de unde plane, având numărul de unde cuprins într-un anumit interval de valori Δk. Corespunzător valorilor numărului de unde, există şi un interval de lungimi de undă $\Delta\lambda$. Rezultă de aici că măsurarea lungimii de undă este echivalentă cu măsurarea numărului de unde. Rezultatul măsurătorii este afectat de o eroare inerentă, el fiind situat în intervalul $k \in \left(k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right)$. Poziția în spațiu a pachetului de unde poate fi şi ea cunoscută doar în limita unor erori : $x \in \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$. Ce rezultă de aici ? Rezultă faptul că poziția pachetului de unde şi numărul de unde asociat acestuia nu pot fi determinate simultan cu oricâtă precizie. Deoarece $\Delta x > \frac{1}{\Delta k}$ tragem concluzia că o măsurătoare foarte precisă a poziției ($\Delta x \to 0$) atrage după sine o imprecizie completă în determinarea numărului de unde ($\Delta k \to \infty$) şi invers. Doar pentru unda armonică plană (care reprezintă o idealizare şi nu o realitate fizică) numărul de unde (şi deci şi lungimea de undă) ar putea fi măsurat riguros, deoarece, în acest caz, imprecizia în determinarea poziție tinde la infinit, $\Delta x \to \infty$.



O analiză asemănătoare se poate face şi în privința preciziei măsurării simultane a pulsației şi momentului de timp. Se poate obține relația :

$$\Delta\omega\, \Delta t > 1$$

Pentru o perturbație foarte bine delimitată în timp, ($\Delta t \to 0$), măsurarea pulsației sau frecvenței acesteia este imposibilă, deoarece $\Delta\omega \to \infty$. Din nou, doar pentru unda plană armonică ar fi posibilă măsurarea precisă a frecvenței, deoarece ea nu are o localizare bine definită în timp, $\Delta t \to \infty$.

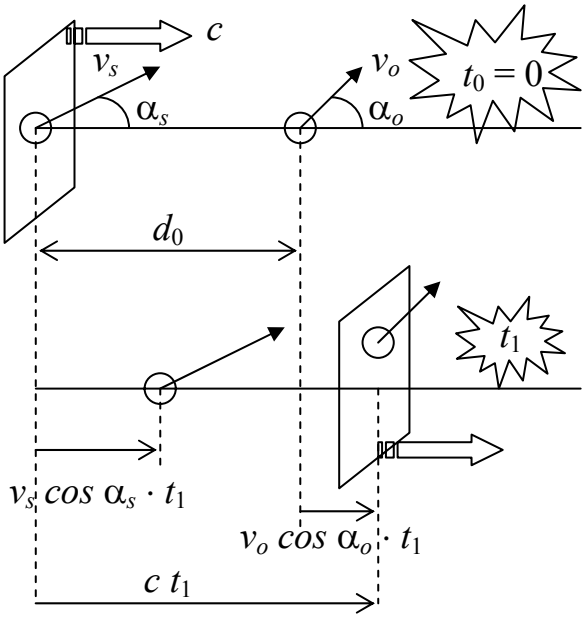
Concluzia este că în asemenea situații, indiferent de calitatea instrumentelor de măsură de care dispunem, eroarea măsurării este inerentă şi explicată chiar de natura fizică a fenomenului.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 250

O demonstrație matematică riguroasă (de altfel, destul de complicată) arată că relațiile de incertitudine au următoarea formă :

$$\Delta x \Delta k \geq 1$$
$$\Delta\omega\, \Delta t \geq 1$$

4.5.9. EFECTUL DOPPLER



Efectul Doppler se manifestă atunci când sursa perturbațiilor care generează unda şi observatorul se află în stare de mişcare relativă unul față de celălalt. Un exemplu ar putea fi locomotiva care şuieră şi se apropie sau se depărtează de noi. Tonalitatea sunetului pe care îl auzim în cele două cazuri este diferită, iar aceasta constituie tocmai manifestarea efectului Doppler.

Să considerăm în continuare o sursă de perturbații periodice care se deplasează cu viteza v_s. Observatorul care recepționează undele generate de perturbațiile generate de sursă se deplasează cu viteza v_o. Undele se propagă cu viteza c. Să admitem că prima perturbație se produce la momentul de timp $t_0 = 0$, la care distanța dintre sursă şi observator este d_0. Frontul de undă ajunge din urmă observatorul la momentul de timp t_1. Ne propunem să calculăm întârzierea t_1. Studiind figura alăturată putem scrie relația :

$$ct_1 = d_0 + v_o \cos\alpha_o \cdot t_1$$

Obținem :

$$t_1 = \frac{d_0}{c - v_o \cos\alpha_o}$$

Următoarea perturbație are loc la sursă după un interval de timp egal cu o perioadă T_0. Întârzierea cu care aceasta ajunge la observator este :

$$t_2 = \frac{d_1}{c - v_o \cos\alpha_o}$$

unde d_1 este distanța sursă-observator la momentul producerii celei de-a doua perturbații. Această distanță este egală cu distanța inițială, la care se adaugă distanța parcursă de observator în timpul T_0 şi se scade distanța parcursă de sursă în acelaşi interval de timp :

$$d_1 = d_0 + v_o \cos\alpha_o \cdot T_0 - v_s \cos\alpha_s \cdot T_0$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 251

Efectul Doppler este utilizat de radarele în pulsuri pentru a detecta ținte în mişcare (de exemplu, avioane sau tornade). Utilizarea efectului Doppler permite eliminarea erorilor datorate reflexiei semnalului radar de către obiectele fixe (de exemplu formele de relief din zonă).

Rezultă :

$$t_2 = \frac{d_0}{c - v_o \cos\alpha_o} + \frac{v_o \cos\alpha_o - v_s \cos\alpha_s}{c - v_o \cos\alpha_o} \cdot T_0$$

Să calculăm acum perioada perturbațiilor recepționate de observator. Prima dintre ele este recepționată la momentul t_1, iar a doua la momentul $T_0 + t_2$, astfel încât :

$$T = (T_0 + t_2) - t_1 = T_0 + \frac{v_o \cos\alpha_o - v_s \cos\alpha_s}{c - v_o \cos\alpha_o} \cdot T_0$$

sau :

$$\boxed{\frac{T}{T_0} = \frac{c - v_s \cos\alpha_s}{c - v_o \cos\alpha_o}}$$

Din expresie, **observăm că perioada undelor recepționate** T **este diferită de perioada undelor emise** T_0. Aceasta este însăşi esența efectului Doppler. Putem trage următoarea concluzie :

Efectul Doppler este datorat faptului că raportul dintre perioada undelor recepționate de un observator şi perioada undelor emise de sursă depinde de viteza de propagare a undelor şi de componentele vitezelor de deplasare ale observatorului şi sursei pe direcția de propagare a undelor.

Ştiind că perioada unei oscilații este inversul frecvenței sale, putem scrie şi relația :

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{c - v_o \cos\alpha_o}{c - v_s \cos\alpha_s}$$

Între undele recepționate şi cele emise există un decalaj de frecvență :

$$\nu - \nu_0 = \frac{v_s \cos\alpha_s - v_o \cos\alpha_o}{c - v_s \cos\alpha_s} \cdot \nu_0$$

În cazul particular în care observatorul este imobil iar sursa este mobilă, formula decalajului de frecvență devine :

$$\nu - \nu_0 = \frac{v_s \cos\alpha_s}{c - v_s \cos\alpha_s} \cdot \nu_0 = \frac{1}{\frac{c}{v_s \cos\alpha_s} - 1} \cdot \nu_0$$

Frecvența la recepție este maximă când sursa se apropie de observator pe direcția de propagare a undei (adică când $\alpha_s = 0$) :

$$\nu_{max} - \nu_0 = \frac{1}{\frac{c}{v_s} - 1} \cdot \nu_0$$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 252

Formula după care frecvența se modifică în funcție de viteza relativă pe care o are observatorul față de sursă nu este valabilă şi pentru radiațiile luminoase. În acest caz, dacă sursa se depărtează de observator cu viteza v, relația este :

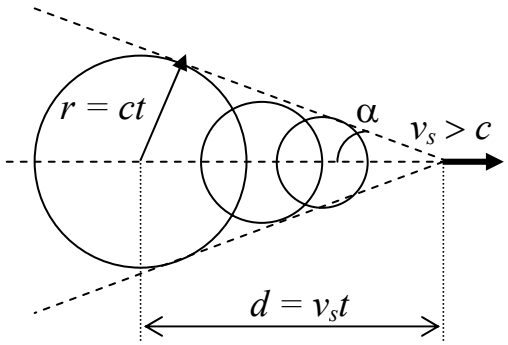
$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \qquad (c = \text{viteza luminii})$$

Frecvența la recepție este minimă când sursa se depărtează de observator pe direcția de propagare a undei (adică când $\alpha_s = 180°$) :

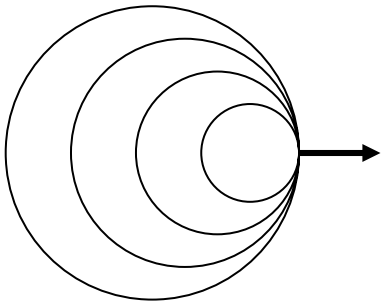
$$\nu_0 - \nu_{min} = \frac{1}{\frac{c}{v_s} + 1} \cdot \nu_0$$

Se observă că în primul caz semnalul recepționat are frecvență mai mare decât cel emis, iar în al doilea caz semnalul recepționat are frecvență mai mică decât cel emis. Dacă undele sunt unde sonore, în primul caz sunetul recepționat este mai înalt decât cel emis, iar în al doilea caz sunetul recepționat este mai jos decât cel emis. Această proprietate ar putea fi folosită pentru calcularea vitezei de deplasare a sursei în cazul în care se cunoaşte frecvența la emisie şi se măsoară decalajul de frecvență la recepție.

Efectul Doppler nu se mai manifestă dacă viteza de deplasare a sursei depăşeşte viteza de propagare a undelor emise de aceasta. În acest caz, îşi face apariția aşa numita **undă de şoc**. Fronturile de undă succesive, respectiv întreaga energie, sunt cuprinse într-un con caracterizat de unghiul α format de înălțimea sa şi generatoare :



$$sin\,\alpha = \frac{r}{d} = \frac{c}{v_s}$$



La limita acestui con, undele vin în contact cu receptorul producând un şoc mecanic extrem de pronunțat şi periculos. Acesta este şi motivul pentru care avioanele supersonice nu au permisiunea de a survola cu viteză supersonică zonele locuite. De altfel, chiar momentul atingerii vitezei sunetului este periculos pentru avion, deoarece (vezi şi figura alăturată) acest moment înseamnă penetrarea unui strat de aer puternic comprimat, care se comportă ca un adevărat „zid” de care avionul se poate „strivi”. Atenuarea acestui şoc mecanic se poate face utilizând forme aerodinamice speciale, caracteristice avioanelor supersonice.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 253

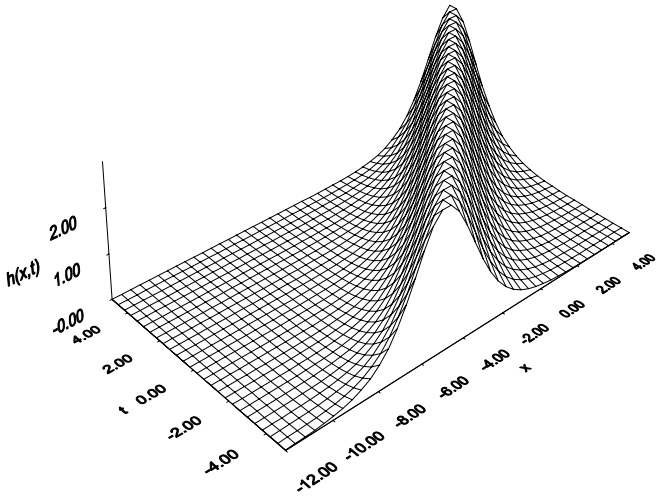
Unda de şoc sau *bang*-ul sonic nu depinde numai de distanța dintre aparatul de zbor şi sol, ci şi de mărimea şi forma acestuia, ca şi de manevrele pe care le întreprinde, presiunea atmosferică, temperatură şi intensitatea vântului. În cazul în care avionul este foarte lung se poate exista un dublu *bang* sonic, produs mai întâi de partea anterioară a aparatului şi apoi de partea posterioară.

4.6. ULTIMUL VAL

Am început această secțiune vorbind despre valuri şi interesul pe care acestea le pot reprezenta pentru oamenii de ştiință, dar nu numai, aşa cum puteți vedea în fotografia alăturată. *Surferul* se mişcă împreună cu valul, rămânând mereu pe creasta acestuia. Creasta unui val are ceva special. Ea pare mereu a se nărui, a cădea în fața valului şi cu toate acestea valul nu se destramă (un fizician ar spune nu se dispersează). Fenomenul nu a scăpat atenției unui fizician, pe nume Korteweg de Vries. Acesta a mai risipit un pic vraja şi poezia şi a dedus o ecuație care se referă la amplitudinea *h* a valurilor de suprafață, în porțiunile cu apă puțin adâncă, departe de țărm :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = 0$$

în care *x* reprezintă coordonata şi *t* momentul de timp într-un sistem de referință în mişcare cu o viteză egală cu viteza de fază în cazul non-dispersiv. Tehnic vorbind, o asemenea ecuație se numeşte ecuație neliniară cu derivate parțiale. Neliniaritatea este reprezentată de al doilea factor al ecuației. Acest factor este cel care explică de ce valul nu se destramă. Soluția acestei ecuații este numită în fizică **undă solitară**. O soluție staționară a ecuației Korteweg de Vries este următoarea :



$$h(x,t) = \frac{3\eta}{ch^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\eta}(x-\eta t)\right]}$$

în care η este un parametru constant. În figura alăturată se poate vedea reprezentarea acestei soluții de tip undă solitară în cazul η = 1.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 254

Undele solitare se pot întâlni şi în cazul propagării luminii prin fibre optice. Însemnătatea lor practică este aceea că se pot confecționa fibre optice în care pierderile de energie în cursul propagării semnalului să fie extrem de mici, iar frecvența acestuia să ajungă chiar la 10^{15} Hz. Implementarea unor asemenea tipuri de fibre optice în sistemele de comunicații ar reduce cu mult costurile de exploatare ale acestora.

5. ACUSTICA

5.1. INTRODUCERE

Orchestra Filarmonicii din Viena este aceea care ne aduce aminte la fiecare 1 ianuarie că Revelionul a trecut şi abia am păşit pragul unui nou an. Desigur, puţini dintre noi, poate nici unul, nu suntem în sala de concerte, dar transmisiunea televizată ne face martori la acest eveniment. Se pot scrie cărţi, cu mult mai vaste şi complicate decât aceasta despre *cum* este posibilă transmisiunea de televiziune. Din păcate, deşi ne-ar plăcea să schiţăm măcar principiile fizice care fac posibile emisiunile de radio

CUGETAREA DE LA PAGINA 255

Muzica este aritmetica sunetelor, aşa cum optica este geometria luminii.

Claude Debussy (1862–1918), compozitor francez

şi de televiziune, telefonia mobilă, sistemele GPS şi alte minuni ale tehnicii moderne, acest curs de fizică nu are libertatea să o facă. Putem doar să ne mărginim la esenţa evenimentului, acel ceva, care vorba personajului lui Caragiale, Marius Chicoş Rostogan, „ne gâdilă plăcut urechea”, sau, dimpotrivă, ne „zgârie” neplăcut auzul : **sunetul**. Emisia, propagarea, recepţionarea sunetelor, precum şi fenomenele fizice legate de aceste procese sunt subiectul unei ştiinţe denumite **acustică**.

✍ **Acustica este ştiinţa preocupată de producerea, controlul, transmisia, recepţia şi efectele sunetului**.

Sunetele ne însoţesc permanent. Tehnic vorbind, sunetele pot fi caracterizate prin **intensitate**, **informaţie**, **reverberaţie**, **claritate**, sau alte numeroase calităţi. Inginerii specializaţi în acest domeniu au ca obiect al muncii optimizarea unora dintre aceste calităţi în locaţii sau scopuri bine definite, prin proiectarea şi realizarea practică a mijloacelor fizice necesare. Există mai multe domenii ale acusticii :

❖ **Acustica arhitecturală**, preocupată de comportamentul undelor sonore în spaţii închise. Scopul urmărit este proiectarea sălilor de concert sau spaţiilor de conferinţe, alegerea formelor geometrice şi materialelor care să permită receptarea sunetelor în cele mai bune condiţii.

❖ **Acustica mediului** tratează problemele controlului zgomotului. În marile aglomerări urbane, zgomotul produs de instalaţiile industriale, de traficul automobilistic sau aerian, de diversele instalaţii şi dispozitive (cum ar fi sistemele de condiţionare a aerului) sunt deja o problemă care poate afecta sănătatea sau confortul locuitorilor. Acustica mediului are ca scop diminuarea agresiunii sonore de acest tip, urmărind pe de o parte reducerea emisiilor acustice la sursă şi pe de altă parte atenuarea zgomotelor şi vibraţiilor prin utilizarea unor materiale izolante specifice.

❖ **Acustica muzicală**, care se preocupă de proiectarea instrumentelor muzicale şi de modul în care sunetele muzicale sunt percepute de auditori.

❖ **Ingineria acustică**, axată pe dezvoltarea sistemelor de înregistrare şi redare de înaltă fidelitate.

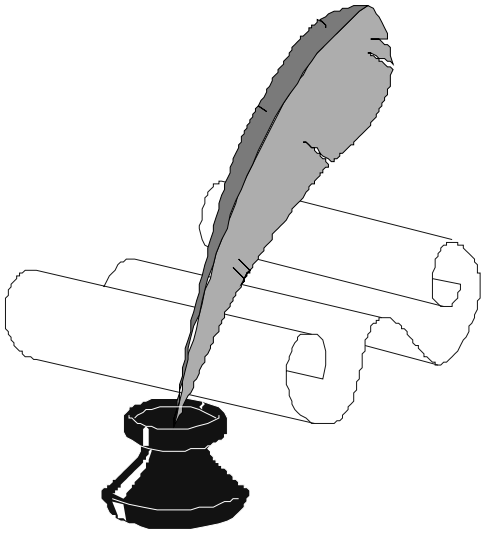
❖ **Acustica ultrasunetelor**, care cercetează fenomenele asociate sunetelor de frecvenţe înalte sau foarte înalte şi aplicaţiile acestora în industrie sau medicină.

INFORMAŢIA DE LA PAGINA 256

Pentru a fi auzit, un sunet este procesat astfel : mai întâi vibraţiile aerului produc vibraţii ale timpanului şi oaselor aflate în porţiunea medie a urechii, apoi aceste vibraţii sunt transmise lichidului aflat în urechea internă, pentru ca în final să ajungă la membrana basilară şi să pună în vibraţie cilii celulelor organului lui Corti. Aceste celule produc influxul nervos, care, prin nervul cochlear este transmis către creier şi prelucrat. Sunetul este recunoscut doar după ce semnalul nervos anteprelucrat ajunge la aria auditivă primară a cortexului cerebral.

5.2. GENERALITĂȚI

✍ Sunetele sunt unde elastice longitudinale, de energie relativ scăzută, care se propagă prin aer sau prin alte medii gazoase, lichide sau solide.



Urechea umană este capabilă să sesizeze doar undele sonore cu frecvențe cuprinse între 20 Hz şi 20 kHz. Acesta este motivul pentru care se face următoarea clasificare a undelor sonore :

❖ **Infrasunete**, adică unde sonore cu frecvență inferioară valorii de 20 Hz.

❖ **Sunete**, adică unde sonore cu frecvență cuprinsă între 20 Hz şi 20 kHz.

❖ **Ultrasunete**, adică unde sonore cu frecvență superioară valorii de 20 kHz.

✍ Sunetele, în calitate de unde mecanice, au toate proprietățile acestora, dar au şi proprietăți specifice care vor fi discutate în continuare.

5.3. VITEZA DE PROPAGARE A SUNETELOR

Propagarea undelor sonore este caracterizată de **viteza de fază**, adică de viteza cu care perturbația elastică se răspândeşte în mediu. În funcție de mediul de propagare, se pot găsi mai multe expresii pentru viteza de fază. Astfel în cazul **mediilor solide** cu dimensiuni limitate, este valabilă expresia :

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 257

Capacitatea de a localiza poziția punctului unde s-a produs un zgomot se datorează diferenței de fază (la rândul ei, datorată diferenței de drum) cu care sunetul ajunge la cele două urechi. Creierul este capabil să discernă diferențe de fază de circa $0{,}2\pi$ radiani. La o lungime de undă de 34 cm, diferența de drum corespunzătoare este de 3,4 cm.

$$c_l = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}$$

Viteza de propagare a sunetelor în medii solide

în care E este modulul de elasticitate al materialului, μ este coeficientul lui Poisson, iar ρ este densitatea materialului. În **lichide**, putem scrie :

$$c_l = \sqrt{\frac{1}{\beta\rho}} \quad ; \quad \beta = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$$

Viteza de propagare a sunetelor în lichide

Factorul β este coeficientul de compresibilitate izotermă al lichidului. În fine, pentru **gaze**, se pot scrie două expresii, prima corespunzând **propagării izoterme** (cazul frecvențelor joase), iar cealaltă **propagării adiabatice** :

$$c_l = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$$

$$c_l = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$$

Viteza de propagare a sunetelor în gaze

În aceste expresii R este constanta gazelor ideale, T temperatura absolută a gazului, μ masa molară a gazului şi γ exponentul său adiabatic.

Iată, cu titlu orientativ, câteva valori ale vitezei de propagare a sunetului în diferite medii :

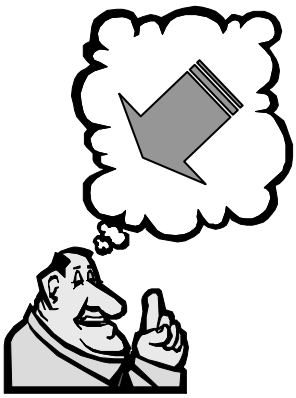
mediul	**viteza** (m/s)	**mediul**	**viteza** (m/s)	**mediul**	**viteza** (m/s)
aer (1 atm ; 0°C)	332	granit	6000	plumb	1200
aer (1 atm ; 100°C)	386	oțel (bară)	5050	apă (15°C)	1440
hidrogen (0°C)	1269	aluminiu	6100	beton	3160
cauciuc	54	sticlă	5190	alcool	1210

✍ Viteza de propagare a sunetului în aer poate depinde de condițiile atmosferice (temperatură, presiune, densitate).

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 258

În cursul propagării undei sonore, aerul suferă compresii şi dilatări repetate. Dacă acestea sunt suficient de lente, poate avea loc schimb de căldură cu restul mediului, iar aerul îşi păstrează constantă temperatura (proces izoterm). Dacă însă variațiile de volum sunt rapide, schimbul de căldură este diminuat şi chiar împiedicat, astfel încât aerul afectat îşi modifică permanent temperatura. Dacă schimbul de căldură este neglijabil, procesul este adiabatic. În cazul frecvențelor obişnuite (sute sau mii de hertzi) propagarea sunetului se face prin procese adiabatice.

5.4. CÂMP SONOR, PRESIUNE SONORĂ



Propagarea undelor elastice se face prin forțele elastice cu care interacționează particulele mediului. Acțiunea mecanică produsă de un factor perturbator se manifestă în deformarea şi deplasarea față de poziția de echilibru a unor mici porțiuni din material. Interacțiunea dintre acestea şi porțiunile învecinate determină apariția unor forțe de presiune suplimentare în interiorul materialului.

Variația de presiune înregistrată într-un punct al materialului în timpul propagării undei elastice, în comparație cu presiunea în absența undei este denumită **presiune sonoră** şi poate constitui o măsură a undei sonore şi a calității acesteia.

Totalitatea presiunilor suplimentare generate în mediul elastic alcătuieşte un **câmp de presiune sonoră**, denumit uneori şi **câmp sonor**.

Notând cu Ψ deplasarea unui punct material al mediului în cursul propagării unei unde elastice longitudinale, am arătat într-unul din capitolele anterioare că presiunea (sau efortul unitar F/S) are expresia :

$$p_s = E\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -\frac{E}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\rho c^2}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\rho c\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Considerând unda plană armonică :

$$\Psi = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$$

rezultă :

$$p_s = \rho c\omega A\sin(\omega t - kx + \varphi) = p_{s,max}\sin(\omega t - kx + \varphi)$$

Densitatea curentului de energie al undei este :

PRECIZAREA DE LA PAGINA 259

Presiunea sonoră maximă $p_{s,max} = \rho c\omega A = \rho c v_{max}$ este proporțională cu viteza maximă de vibrație a particulelor mediului v_{max}, cu densitatea mediului ρ şi cu viteza de fază a undei sonore c.

$$J = cw = c\rho\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2 = c\rho\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)$$

Raportul dintre densitatea curentului de energie şi pătratul presiunii sonore este :

$$\frac{J}{p_s^2} = \frac{c\rho\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)}{\rho^2 c^2 \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx + \varphi)} = \frac{1}{\rho c}$$

Deci :

$$\boxed{J = \frac{p_s^2}{\rho c}}$$

Densitatea curentului de energie al undei sonore

Intensitatea undei sonore (adică media în timp a densității curentului de energie al undei sonore) are forma matematică :

$$I = \langle J \rangle_t = \frac{1}{\rho c}\langle p_s^2 \rangle_t$$

unde ρ este densitatea mediului, iar *c* este viteza de fază a undei.

Intensitatea se poate calcula astfel :

$$I = \langle J \rangle_t = \frac{1}{\rho c}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T p_s^2 dt = \frac{p_{s,max}^2}{\rho c}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - kx + \varphi)dt$$

Cum :

$$\int_0^T \sin^2(\omega t - kx + \varphi)dt = \int_0^T \sin^2\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]dt = \int_0^T \frac{1 - \cos 2\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]}{2}dt = \frac{T}{2}$$

rezultă :

$$\boxed{I = \frac{p_{s,max}^2}{2\rho c}}$$

Intensitatea undei sonore

Factorul ρc se numeşte **impedanță acustică**, iar raportul $p_{s,max}/\sqrt{2}$ este cunoscut ca **presiunea sonoră efectivă** p_{ef}.

Densitatea medie de energie a undei sonore este : $\langle w \rangle = \frac{\langle J \rangle}{c} = \frac{p_{s,max}^2}{2\rho c^2}$

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 260

Variațiile de presiune în cursul propagării sunetelor prin aer au valori foarte mici. De exemplu, în cazul unei conversații normale intensitatea sunetului este de circa 10^{-8} W/m^2, ceea ce corespunde unei presiuni maxime de aproape 3 mPa.

5.5. CARACTERISTICILE SUNETELOR

5.5.1. TĂRIA

Tăria unui sunet este o mărime legată, pe de-o parte, de efectul auditiv pe care-l produce sunetul şi, pe de-altă parte, de cantitatea de energie pe care o transportă unda sonoră.

Efectul auditiv şi energia undei sonore **nu** se află într-o simplă relaţie de proporţionalitate, din cauza **caracterului subiectiv al percepţiei auditive**. Din acest motiv trebuie să utilizăm mărimi fizice diferite pentru a caracteriza tăria sunetului, fie din punctul de vedere obiectiv al transferului de energie sonoră, fie din punctul de vedere subiectiv al efectului auditiv.

Să considerăm mai întâi un **ton muzical pur**, adică o undă sonoră de frecvenţă bine stabilită.

Tăria unui ton muzical pur poate fi caracterizată din punct de vedere obiectiv de **intensitatea sonoră**, adică de cantitatea de energie sonoră transportată în unitatea de timp, prin unitatea de suprafaţă perpendiculară direcţiei de propagare a sunetului

$$I_\nu = \frac{dW_s}{dS_n dt}$$

Intensitatea sonoră minimă care mai poate fi sesizată de analizatorul auditiv uman se numeşte **intensitatea pragului de audibilitate**.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 261

Valorile intensităţii corespunzătoare pragului de audibilitate sau pragului de durere variază de la o persoană la alta, iar pentru o persoană dată depind de vârstă sau de alţi factori. Din acest motiv, valorile considerate ca valori standard sunt de fapt date statistice, obţinute prin medierea rezultatelor cercetărilor făcute pe grupuri mari de subiecţi.

Valoarea intensității sonore care corespunde pragului de audibilitate este o funcție de frecvența sunetului. Domeniul de maximă sensibilitate al urechii umane este cuprins între frecvențele de 600 Hz şi de 7000 Hz. În acest interval pot fi percepute sunete de intensitate $I = 10^{-12} - 10^{-11}$ W/m^2.

S-a ales ca **valoare standard a pragului de audibilitate** intensitatea pragului de audibilitate al sunetului pur cu frecvența de 1000 Hz

$$I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Există pentru fiecare frecvență şi o valoare maximă a intensității care mai poate fi suportată fără a produce efecte ireversibile asupra aparatului auditiv.

Valoarea maximă a intensității care mai poate fi suportată fără a produce efecte ireversibile asupra aparatului auditiv este numită **intensitatea pragului de durere**.

Intensitatea pragului de durere este mai mică în intervalul de frecvențe pentru care urechea este mai sensibilă (0,1 W/m^2 la 6000 Hz), ajungând pentru alte frecvențe până la 10 W/m^2.

Deoarece valorile numerice extreme ale intensităților sonore care trebuie luate în considerație în ceea ce priveşte efectul auditiv diferă prin 13 ordine de mărime, se preferă utilizarea unei mărimi fizice relative, denumită **nivelul de intensitate acustică**.

Nivelul intensității acustice se defineşte ca fiind de zece ori logaritmul zecimal al raportului dintre intensitatea sonoră a sunetului considerat şi intensitatea standard a pragului de audibilitate:

$$L = 10 lg \frac{I}{I_0}$$

Unitatea de măsură a nivelului intensității acustice este **decibelul**, cu simbolul **dB**.

PROBLEMA DE LA PAGINA 262

Calculați cu câte procente trebuie să crească intensitatea unui sunet pentru ca nivelul intensității acustice să se mărească cu un decibel.

Efectul auditiv al unor sunete, în funcție de distanța până la locul unde au fost generate, este prezentat în următorul tabel :

Sursa sunetului	Distanța (m)	Intensitatea (W/m^2)	Nivelul intensi-tății (dB)
şoaptă (prag de audibilitate)	1	10^{-12}	0
căderea picăturilor de apă	1	10^{-10}	20
conversație normală	1	10^{-8}	40
automobile rulând pe asfalt	5-10	10^{-6}	60
orchestră simfonică	3-5	10^{-4}	80
ciocan de nituit	1	10^{-2}	100
motor de avion (prag de durere)	10	1	120

Datorită subiectivității urechii, sunete având acelaşi nivel al intensității acustice provoacă senzații auditive diferite. Spre limitele extreme ale domeniului de frecvențe, pragul de audibilitate creşte mult, iar valorile minime sunt întâlnite pentru frecvențe între 500 şi 5000 de Hz. Pentru a descrie tăria unui sunet, aşa cum este el perceput de urechea umană, se foloseşte o mărime denumită **nivel de tărie al sunetului**.

Nivelul de tărie al sunetului este definit ca de zece ori logaritmul zecimal al raportului dintre intensitatea sonoră a unui sunet cu frecvența de 1000 Hz, care are aceeaşi tărie aparentă ca şi sunetul considerat, şi intensitatea standard a pragului de audibilitate.

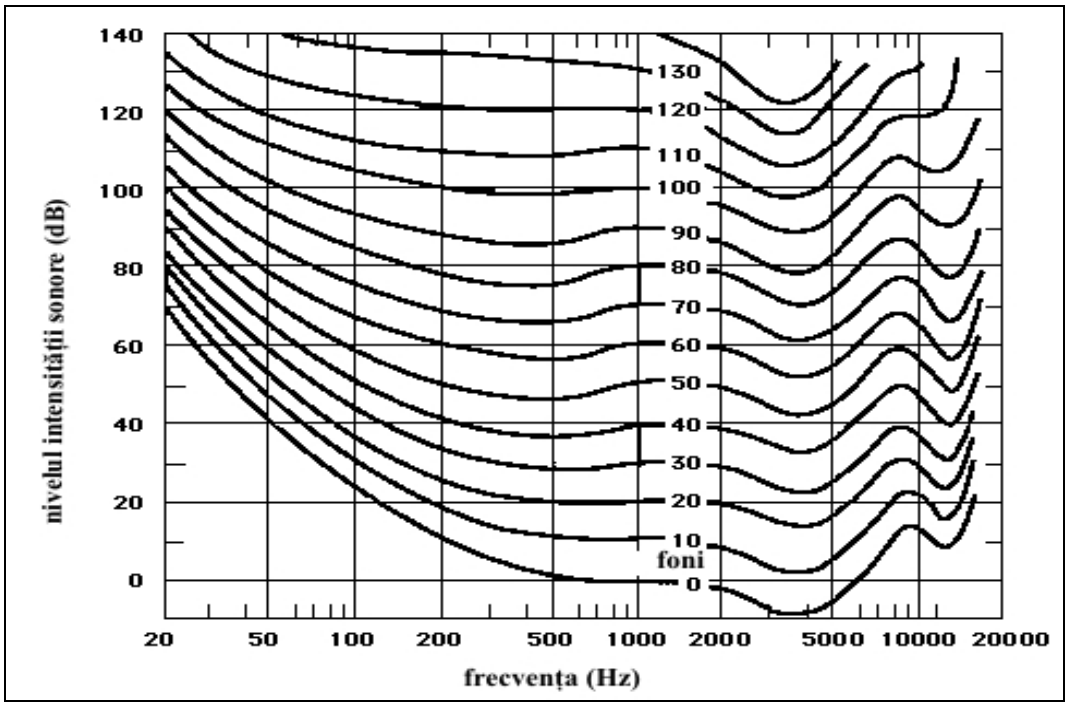
Unitatea de măsură a nivelului de tărie este **fonul**. Relația de calcul a nivelului de tărie este :

$$L_t = 10\,lg\frac{I_{1000}}{I_0} = 10\,lg\frac{K_\nu I_\nu}{I_0} = L + 10\,lg\,K_\nu$$

Factorul K_ν este o mărime biofizică, iar valoarea sa, în funcție de frecvența şi natura sunetului, este dată de curbe sau de tabele experimentale. Un exemplu de diagramă (diagrama Fletcher-Munson) care reflectă relația între nivelul intensității acustice şi nivelul de tărie al sunetului, în funcție de frecvență, este prezentat mai jos. Nivelul de tărie, exprimat în foni, este numeric egal cu nivelul intensității acustice, exprimat în decibeli, **numai** pentru sunetele cu frecvența de 1000 Hz. De exemplu, un sunet cu frecvența de 50 Hz şi cu intensitatea de 40 dB este auzit cu tăria de 10 foni.

PROBLEMA DE LA PAGINA 263

Ce valoare are factorul K_ν în exemplul la care am făcut referire mai sus (40 dB → 10 fon) ?



5.5.2.ÎNĂLȚIMEA ȘI TIMBRUL

Tonurile muzicale pure sunt **unde elastice armonice, de frecvență bine definită**, care determină oscilații locale, armonice, ale particulelor mediului, de forma :

$$y = A\ sin(2\pi\nu t + \varphi)$$

Calitatea sunetului, denumită **înălțime,** este asociată frecvenței unui ton muzical pur.

În funcție de înălțimea lor tonurile muzicale pure sunt grupate în **octave**. Octava începe cu o notă muzicală (de obicei nota ***do***) şi se încheie cu aceeaşi notă, corespunzând acum octavei următoare. Raportul dintre frecvența ultimei note a octavei şi frecvența primei note este egal cu doi. În interiorul unei octave există douăsprezece intervale de frecvență ce separă notele muzicale standard. Frecvența notei ***la*** din prima

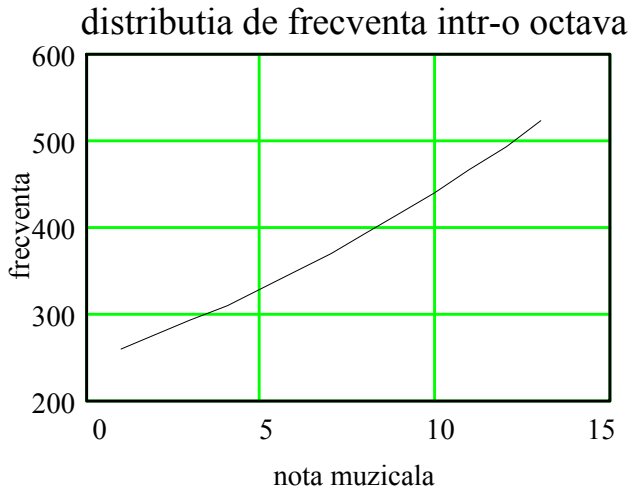
ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 264

Există mai multe frecvențe în jurul cărora nivelul intensității acustice (măsurat în dB) să fie egal cu nivelul de tărie a sunetului (măsurat în fon) ? Luați ca exemplu sunetul cu tăria de 40 fon.

octavă a fost stabilită la valoarea de 440 Hz. Frecvențele tuturor celorlalte note muzicale pot fi calculate în funcție de această frecvență după relația :

$$\nu = 440 \cdot 2^{n-1+\frac{m-10}{12}}$$

unde *n* este numărul octavei şi *m* poziția notei în interiorul octavei. Urechii umane îi este accesibilă gama de frecvențe 20 Hz - 20000 Hz, adică aproximativ 10 octave. Iată distribuția frecvențelor pentru prima octavă :



nota	ν (Hz)	nota	ν (Hz)
1. do	261,63	8. sol	392,00
2. do#	277,18	9. sol#	415,31
3. re	293,67	**10. la**	**440**
4. re#	311,13	11. la#	466,16
5. mi	329,63	12. si	493,88
6. fa	349,23	1′. do	523,25
7. fa#	369,99	-	-

✍ **Tonul muzical complex** este sunetul format dintr-un ton muzical pur, fundamental, însoțit de alte tonuri muzicale pure, având frecvențe egale cu multipli întregi ai frecvenței fundamentale, numite **armonice de ordin superior**.

În funcție de proporția în care armonicele superioare se compun cu tonul fundamental, sunetul rezultat este auzit într-un mod diferit.

✍ Calitatea sunetului de-a fi perceput într-un mod distinct, deşi este bazat pe acelaşi ton fundamental, se numeşte **timbru**.

Pe lângă sunetele muzicale întâlnim şi **zgomotele**. Acestea sunt perturbații în general aperiodice, reprezentând sunete nedorite care provoacă senzații auditive neplăcute. Ca fenomen fizic, zgomotul nu este diferit în mod esențial de sunetele muzicale.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 265

Existau culturi antice care încadrau muzica în sisteme de gândire cosmologice, filosofice sau științifice. În vechea Chină, gama notelor muzicale reflecta conceptul organizării universului. Fiecare notă era legată de punctele cardinale, de elementele primordiale, de anotimpuri, de planete, de lunile anului, de culori, de materiale, de numere, de părți ale corpului uman, de animale, de mirosuri, etc. Chinezii considerau că în natură există opt surse de sunete muzicale : metalul, piatra, mătasea, bambusul, calabaşul (fructul unui copac cu acelaşi nume), pământul ars (teracota), pielea şi lemnul.

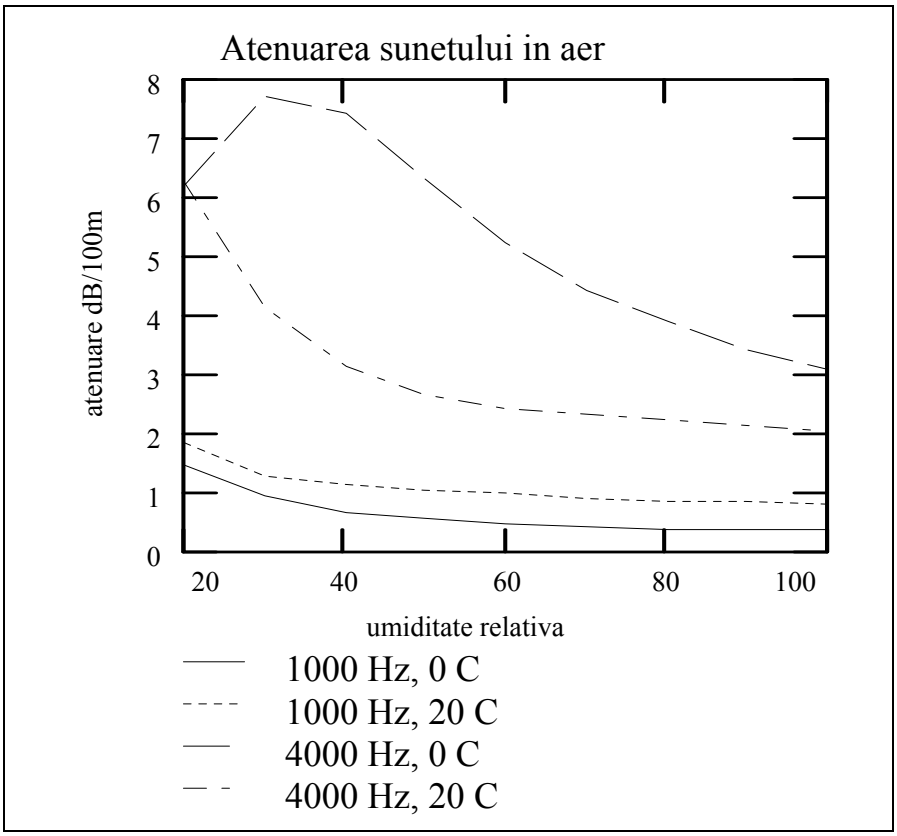
5.6. FENOMENE CARE ÎNSOȚESC PROPAGAREA SUNETELOR

Transmiterea undelor sonore în spațiu este însoțită de întreaga gamă a fenomenelor fizice care se produc în cursul propagării undelor elastice. Dintre acestea amintim :

❖ **Reflexia şi refracția**, adică fenomenele ce apar atunci când unda sonoră întâlneşte suprafața de separație dintre două medii elastice.

❖ **Interferența**, adică fenomenul de compunere într-un punct din spațiu a două sau mai multe unde sonore coerente.

❖ **Difracția**, adică fenomenul care constă în ocolirea aparentă de către sunet a unor obstacole având dimensiuni comparabile cu lungimea de undă. Acest fenomen este mai important în cazul sunetelor având o frecvență scăzută (şi deci lungime de undă mare) şi neglijabil în cazul ultrasunetelor.



❖ **Absorbția** sau atenuarea, adică fenomenul de disipare a energiei sonore pe măsura creşterii distanței de propagare. Absorbția energiei sonore se datorează transferării unei părți din energia cinetică de oscilație a moleculelor mediului către mişcarea termică dezordonată a acestora, însoțită de încălzirea mediului. În cazul propagării sunetului prin aer, un rol important în absorbție îl au frecvența sunetului şi temperatura sau umiditatea aerului.

PRECIZAREA DE LA PAGINA 266

În cazul absorbției, un factor important îl constituie şi vâscozitatea mediului. În general, descreşterea amplitudinii vibrațiilor sonore se face după o lege exponențială :

$$A(x) = A_0 e^{-\alpha x}$$

unde x este distanța parcursă de undă, iar α este coeficientul de atenuare liniară.

Atenuarea sunetului se poate produce şi la suprafaţa de separaţie dintre două medii, alături de reflexie şi refracţie. Pentru motive practice se defineşte **coeficientul de absorbţie** α ca fiind raportul dintre densitatea de energie nereflectată şi cea incidentă :

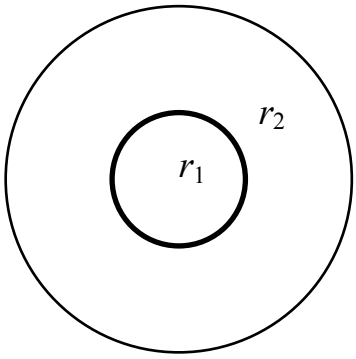
$$\alpha = \frac{w_{incident} - w_{reflectat}}{w_{incident}}$$

Nu trebuie confundată atenuarea sunetului prin absorbţie cu aceea care se datorează micşorării densităţii de energie a undei sonore pe măsura depărtării de sursa de sunet. Aceasta din urmă apare ca urmare a creşterii volumului în care se distribuie energia sonoră, în condiţiile în care energia totală transportată are valoare constantă.

5.7. PROPAGAREA SUNETELOR ÎN SPAŢII DESCHISE ŞI ÎN SPAŢII ÎNCHISE

Fie un sunet emis de o sursă ce poate fi considerată punctiformă în raport cu distanţa până la punctul de recepţie. Considerăm că sursa se găseşte într-un spaţiu deschis, iar sunetul nu întâlneşte obstacole în cursul propagării. În acest caz fronturile de undă consecutive au forma unor sfere concentrice. Fie fronturile de undă de raze r_1 şi r_2. În lipsa absorbţiei fluxul de energie sonoră prin cele două suprafeţe de undă este egal :

$$\Phi_1 = \Phi_2$$



Deoarece fluxul de energie este egal cu produsul dintre intensitatea sunetului şi mărimea suprafeţei traversate de acesta, rezultă :

$$I_1 \cdot 4\pi r_1^2 = I_2 \cdot 4\pi r_2^2$$

sau :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Deoarece $r_2 > r_1$ rezultă că raportul celor două intensităţi

INFORMAŢIA DE LA PAGINA 267

Unul din obiectivele ingineriei acustice este şi acela de a găsi materiale ale căror coeficienţi de absorbţie la reflexie să varieze în funcţie de frecvenţa sunetului. Acestea pot atenua mai puternic sunetele dintr-un anumit interval de frecvenţe, fără a afecta sunetele din alte intervale de frecvenţă.

este subunitar şi deci sunetul este atenuat chiar în lipsa absorbției, ca efect al îndepărtării față de sursă. Atenuarea nivelului intensității acustice este :

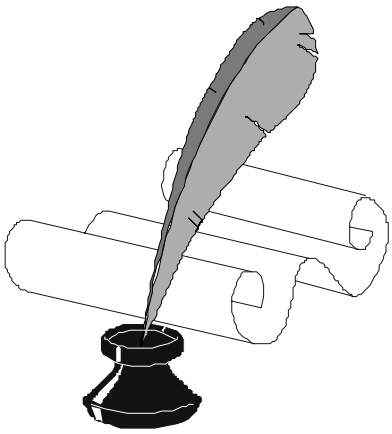
$$\Delta L = 10 lg \frac{I_2}{I_1} = 20 lg \frac{r_2}{r_1} \quad \text{(dB)}$$

În cazul $r_2 = 10\ r_1$ atenuarea obținută este de 20 de decibeli. Acest tip de atenuare este independent de frecvența sunetului şi de condițiile de mediu.

În prezența absorbției atenuarea este amplificată. De această dată trebuie luate în considerare atât frecvența sunetului cât şi condițiile de mediu. În cazul unui sunet complex, absorbția componentelor sale se face în mod diferit, în funcție de frecvență. Acest fapt duce la schimbarea caracteristicilor sunetului pe măsura îndepărtării de locul de origine. Deoarece sunetele înalte sunt absorbite mai intens decât sunetele joase, spectrul de frecvență este modificat astfel încât tonalitatea sunetului se modifică în cursul propagării.

Să luăm ca exemplu presiunile sonore ale sunetului complex, cu frecvența fundamentală de 500 Hz şi patru armonice ale sale, înscrise în prima coloană a tabelului ce urmează ($x = 2\pi\nu t$) :

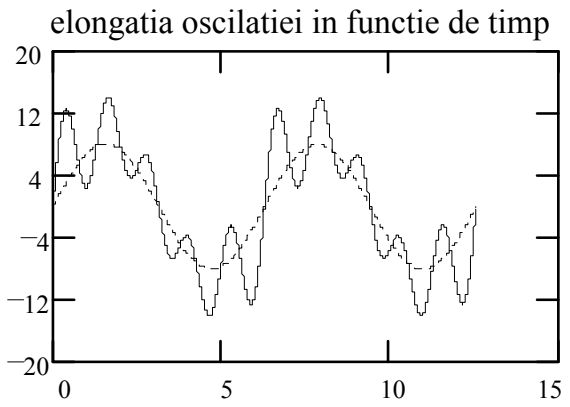
$p = 10{,}000\ sin\ x$	ΔL= 1,9 dB/1000 m	$p = 8{,}035\ sin\ x$
$p_1 = 0{,}625\ sin\ 2x$	ΔL= 4,6 dB/1000 m	$p_1 = 0{,}378\ sin\ 2x$
$p_2 = 1{,}250\ sin\ 3x$	ΔL= 8,0 dB/1000 m	$p_2 = 0{,}498\ sin\ 3x$
$p_3 = 2{,}500\ sin\ 4x$	ΔL= 11,3 dB/1000 m	$p_3 = 0{,}681\ sin\ 4x$
$p_4 = 5{,}000\ sin\ 5x$	ΔL= 18,0 dB/1000 m	$p_4 = 0{,}629\ sin\ 5x$

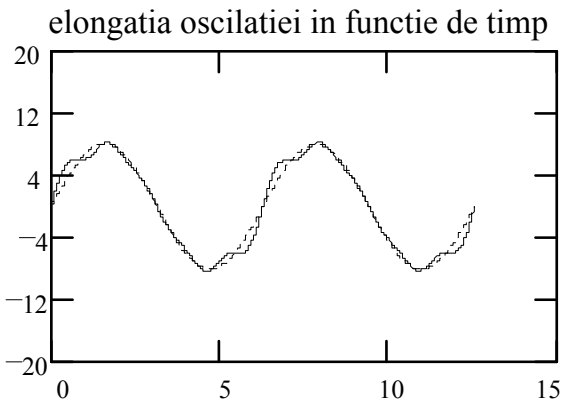


În coloana a doua sunt trecute atenuările datorate absorbției pe o distanță de 1000 m, la temperatura de 20°C şi umiditatea relativă de 40%. Cunoscând atenuarea putem calcula amplitudinile finale ale presiunilor sonore, completând astfel cea de-a treia coloană a tabelului. Reprezentând grafic presiunea sonoră totală inițială şi cea finală, comparată cu presiunea sonoră a sunetului fundamental (curba punctată), observăm diferențe mari, legate de atenuarea frecvențelor înalte:

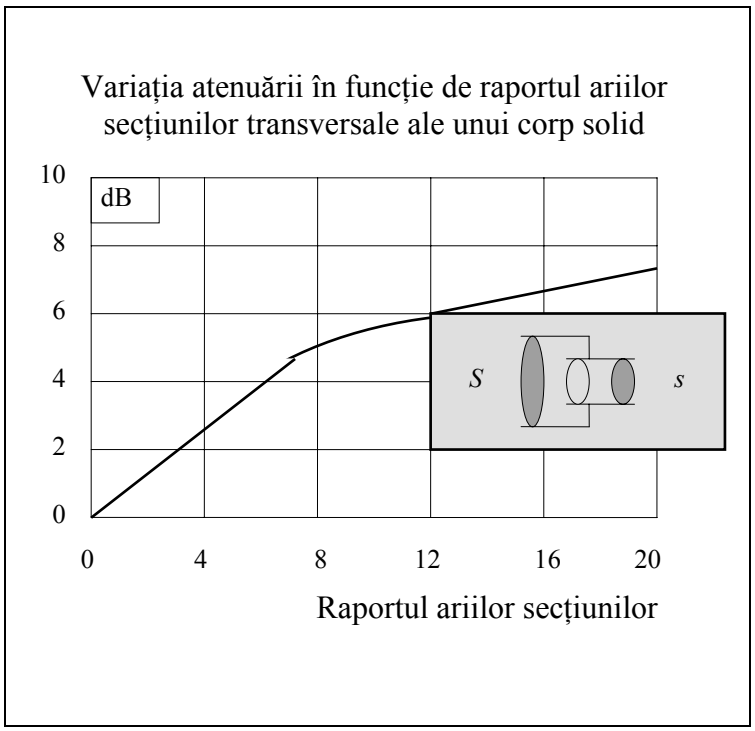
INFORMAȚIA DE LA PAGINA 268

Atenuarea sunetului în aer este mult mai pronunțată decât în lichide sau solide. Aşa se explică de ce, de exemplu, punând urechea pe şina de tren auzim zgomotul făcut de acesta cu mult timp înainte de a-l vedea sau a auzi sunetul transmis prin aer.





Atenuarea sunetelor care se propagă în apropierea solului este influențată atât de condițiile atmosferice (ceața, precipitațiile, temperatura ridicată sau poluarea atmosferei micşorează absorbția), cât şi de starea suprafeței solului (de exemplu, un strat de zăpadă absoarbe o mare parte din energia undelor incidente).



La propagarea undelor sonore prin medii solide atenuarea este influențată de variația secțiunii transversale a materialului. Calculul atenuării undelor în bare longitudinale de secțiune variabilă se face ținând cont de coeficientul de transmisie acustică :

$$T = \frac{4sS}{(s+S)^2}$$

Atenuarea obținută are valoarea :

$$\Delta L = 10\,lg\frac{1}{T}\ \text{(dB)}$$

Dacă se aşează în drumul undelor sonore straturi din alte materiale decât mediul principal de propagare, având grosimi mai mici decât lungimea de undă a sunetului, coeficientul de transmisie acustică este dat de relația :

PROBLEMA DE LA PAGINA 269

Pentru ce raport s/S atenuarea prin transmisie atinge valoarea de 10 dB ?

$$T = \frac{1 + tg^2 \dfrac{2\pi l}{\lambda}}{1 + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \dfrac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}\right)^2 tg^2 \dfrac{2\pi l}{\lambda}}$$

unde l este grosimea stratului, λ este lungimea de undă a sunetului, c este viteza sa de fază, iar ρ este densitatea materialului. Atenuarea este maximă pentru $l = \lambda/4$.

În cazul în care sursa de zgomot se află într-o cameră închisă trebuie luate în considerație şi reflexiile sunetului pe suprafețele care mărginesc camera şi obiectele aflate în aceasta. Pierderile de energie sonoră ca urmare a reflexiilor sunt măsurate prin **coeficientul mediu de absorbție acustică** :

$$\alpha = \frac{\sum_i \alpha_i S_i}{\sum_i S_i}$$

unde S_i reprezintă ariile diverselor suprafețe reflectante din încăpere, iar α_i sunt coeficienții de absorbție acustică ai acestora. Constanta de absorbție a camerei are expresia :

$$R = \frac{\alpha S}{1-\alpha} = \frac{\alpha \sum_i S_i}{1-\alpha}$$

Contribuția adusă de sunetele reflectate în orice punct al încăperii poate fi considerată constantă, intensitatea sonoră corespunzătoare având expresia :

$$I_r = \frac{4\Phi}{R}$$

unde Φ este fluxul de energie emis de sursă. La această intensitate sonoră se adaugă cea a sunetului care ajunge direct de la sursă în punctul pe care-l luăm în considerație:

$$I_t = \frac{\Phi}{4\pi r^2} + \frac{4\Phi}{R}$$

În cazul în care sursa este direcțională, adică există o direcție preferențială după care se face emisia sunetului, intensitatea totală într-un punct din spațiu este :

$$I_t = \Phi\left(\frac{Q}{4\pi r^2} + \frac{4}{R}\right)$$

unde Q este factorul de direcționalitate.

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 270

Pentru ce raport al impedanțelor acustice coeficientul de transmisie acustică este maxim, fiind fixate lungimea de undă λ şi lungimea materialului l ?

5.7.1. DISTRIBUȚIA ENERGIEI SONORE ÎNTR-UN SPAȚIU ÎNCHIS

Să considerăm o sursă sonoră aflată într-un spațiu închis, mărginit de suprafețe în parte reflectătoare, în parte absorbante. Putem caracteriza o asemenea suprafață prin **coeficientul de absorbție acustică** α, definit ca raportul dintre energia acustică absorbită de suprafață şi energia acustică incidentă:

$$\alpha = \frac{W_{abs}}{W_{inc}} = \frac{W_{inc} - W_{ref}}{W_{inc}}$$

Vom încerca în continuare să găsim o expresie a densității de energie sonoră din incintă, pornind de la următoarele ipoteze :

- puterea de emisie a sursei este suficient de redusă, iar dimensiunile incintei suficient de mici, astfel încât să putem considera că energia sonoră se distribuie uniform în întreg volumul incintei, la fiecare moment de timp
- absorbția se produce doar la contactul cu suprafața ce delimitează incinta, absorbția în aer fiind neglijabilă
- sursa sonoră radiază izotrop, iar reflexiile multiple fac să nu existe direcție preferențială de propagare a undelor sonore

În aceste condiții, considerând un mic element de volum dV, putem afirma că pe durata unui mic interval de timp dt întreaga energie sonoră dW, conținută inițial în interiorul său, este radiată prin suprafața sa laterală, fiind înlocuită cu o cantitate egală de energie, venită din mediu prin aceeaşi suprafață laterală : $d\Phi dt$. Matematic, putem scrie :

$$dW = d\Phi \cdot dt$$

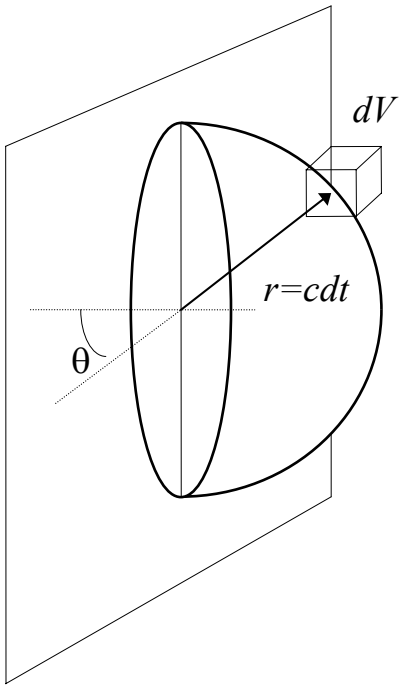
unde $d\Phi$ reprezintă fluxul de energie sonoră sosit prin suprafața laterală. Deoarece radiația este izotropă, fluxul de energie prin unitatea de unghi solid, are expresia :

$$d\phi = d\Phi / 4\pi$$

În elementul de volum densitatea de energie sonoră este w. Energia conținută inițial în elementul de volum este $dW = wdV$. Rezultă :

PRECIZAREA DE LA PAGINA 271

Coeficientul de absorbție acustică α depinde de atât de natura materialului reflectător, cât şi de frecvența sunetului. În general, el creşte cu frecvența. Betonul are coeficienți de absorbție mici în comparație cu materialele textile. De aceea pereții sălilor de spectacole sunt tapetate cu materiale textile.



$$d\phi = \frac{wdV}{4\pi dt}$$

Ne propunem să calculăm cantitatea de energie incidentă în intervalul de timp *dt* la un element de suprafață *dS* al peretelui. Această energie este radiată de toate elementele de volum cuprinse într-o semisferă de rază $r = cdt$ (unde *c* este viteza de propagare a sunetului), centrată în punctul în care se găseşte elementul de volum. Cantitatea de energie, raportată la unitatea de suprafață, şi care soseşte de la un asemenea element de volum este direct proporțională cu fluxul sunetului emis $d\phi$, invers proporțională cu pătratul distanței de la elementul de volum la elementul de suprafață, proporțională cu intervalul de timp *dt* şi depinde de unghiul dintre direcția de propagare şi normala la elementul de suprafață :

$$\frac{dW}{dS} = \frac{d\phi dt}{r^2} cos\,\theta = \frac{wdV}{4\pi r^2} cos\,\theta$$

Elementul de volum *dV* poate fi exprimat în coordonate sferice :

$$dV = r^2\, sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

rezultând :

$$\frac{dW}{dS} = \frac{w}{4\pi} sin\,\theta\, cos\,\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Energia incidentă totală se găseşte prin integrare, extinsă la întreg volumul semisferei de rază *cdt* :

$$\frac{dW_{inc}}{dS} = \frac{w}{4\pi} \int_0^{cdt} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\,\theta\, cos\,\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\frac{dW_{inc}}{dS} = \frac{w}{4\pi} \cdot cdt \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \frac{cw}{4} \cdot dt$$

Cantitatea de energie absorbită este $dW_{abs} = \alpha\, dW_{inc}$. Într-un interval de timp *dt* sursa sonoră eliberează o cantitate de energie :

$$dW_{sursă} = P\, dt$$

unde *P* este puterea sursei.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 272

Reverberația este efectul resimțit atunci când sunetul direct este însoțit de sunetele reflectate de suprafețele dintr-o încăpere. Dacă prin reflexie se pierde doar o mică parte din energia sunetului incident, reverberația este puternică, iar efectul este supărător (de exemplu, într-o sală de conferințe improprie, reverberația poate conduce la imposibilitatea de a înțelege cele spuse de orator).

Din aceasta o parte (W_{abs}) este pierdută prin absorbție în pereți, iar restul contribuie la creşterea densității de energie sonoră din incintă. Cantitatea totală de energie absorbită este :

$$W_{abs} = \int_S \alpha \frac{cw}{4} dt \cdot dS = \frac{\alpha cwS}{4} dt$$

Creşterea densității de energie sonoră se poate exprima astfel :

$$Vdw = dW_{sursa} - W_{abs}$$

$$Vdw = Pdt - \frac{\alpha cwS}{4} dt$$

sau :

$$\frac{dw}{dt} + \frac{\alpha cS}{4V} w = \frac{P}{V}$$

Facem schimbarea de funcție :

$$u = w - \frac{4P}{\alpha cS}$$

Înlocuind în ecuația diferențială, ne rămâne :

$$\frac{du}{dt} + \frac{\alpha cS}{4V} u = 0$$

Soluția este :

$$u = Ce^{-\frac{\alpha cS}{4V}t} \quad \Rightarrow \quad w = Ce^{-\frac{\alpha cS}{4V}t} + \frac{4P}{\alpha cS}$$

Constanta de integrare C se poate determina punând condiția ca la momentul inițial de timp, $t = 0$, densitatea de energie acustică să fie nulă:

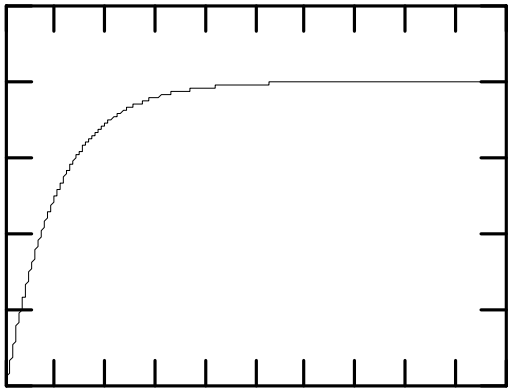
$$0 = C + \frac{4P}{\alpha cS} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{4P}{\alpha cS}$$

Obținem în final :

$$w = \frac{4P}{\alpha cS}\left(1 - e^{-\frac{\alpha cS}{4V}t}\right)$$

LEGENDA DE LA PAGINA 273

Ecoul este asemănător reverberației, în sensul că el este tot rezultatul reflexiei sunetelor pe anumite suprafețe. Desigur, cunoaşteți sau ați experimentat ecoul. Ce s-ar putea să nu știți este originea cuvântului. În mitologia greacă Echo era o nimfă, care ținând-o de vorbă pe Hera, soția lui Zeus, o împiedica pe aceasta să-şi urmărească soțul, care avea numeroase aventuri amoroase. Ca pedeapsă pentru Echo, Hera a făcut ca aceasta să-şi piardă darul vorbirii, cu o singură excepție : putea repeta ultimele cuvinte ale altei persoane. Mai târziu, Echo s-a îndrăgostit de Narcis (care, vai !, era îndrăgostit doar de propria persoană), iar iubirea fără speranță pe care o nutrea a făcut-o să se „topească”, până ce n-a mai rămas din ea decât vocea.



Graficul densității de energie în funcție de timp relevă atingerea unei valori staționare :

$$w_{max} = \frac{4P}{\alpha c S}$$

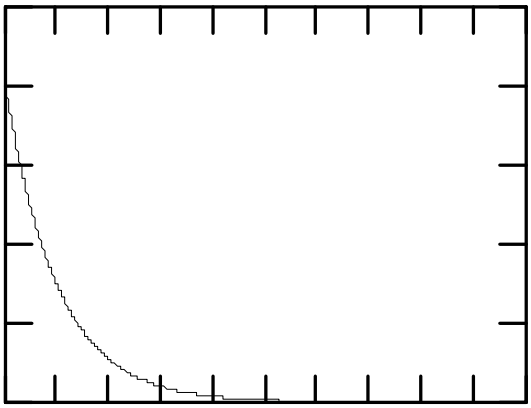
după trecerea scurgerea a câtorva intervale de timp :

$$\Delta t = \frac{4V}{\alpha c S}$$

de la începerea emisiei sonore.

Dacă emisia sonoră încetează, densitatea de energie acustică nu se anulează brusc. Ecuația diferențială corespunzătoare acestei situații se obține luând $P = 0$, astfel încât rezultă :

$$\frac{dw}{dt} + \frac{\alpha c S}{4V} w = 0$$



În condițiile în care densitatea inițială de energie este egală cu densitatea maximă w_{max}, soluția acestei ecuații este :

$$w = \frac{4P}{\alpha c S} e^{-\frac{\alpha c S}{4V} t}$$

După cum se remarcă din graficul alăturat, trebuie să treacă câteva intervale de timp $\Delta t = \frac{4V}{\alpha c S}$ pentru ca densitatea sonoră să se anuleze aproape complet. Spunem că sunetul persistă în încăpere deoarece există o **reverberație**.

Timpul de reverberație este o mărime care caracterizează din punct de vedere acustic încăperile. El este definit ca timpul necesar pentru ca densitatea de energie sonoră să scadă la a milioana parte din valoarea ei maximă. Putem scrie :

$$T = \frac{4V}{\alpha c S} ln 1000000 = \frac{24 \cdot ln 10}{340 \cdot \text{m/s}} \cdot \frac{V}{\alpha S} \approx 0{,}1625 \frac{V}{\alpha S}$$

ÎNTREBAREA DE LA PAGINA 274

Fiind date mai multe incinte goale, de volume egale, având acelaşi coeficient de absorbție α, dar forme geometrice diferite, care este forma incintei cu cel mai mare timp de reverberație ?

✍ Această relație este cunoscută sub numele de **formula lui Sabine** şi este valabilă pentru încăperi goale, deoarece nu ia în considerație absorbția suplimentară datorată obiectelor sau ființelor aflate în încăpere.

Formula densității de energie poate fi scrisă şi în funcție de timpul de reverberație după cum urmează :

❖ în cazul prezenței emisiei sonore :

$$w = \frac{PT}{6V\,ln10}\left(1 - e^{-\frac{6t\,ln10}{T}}\right) = \frac{PT}{6V\,ln10}\left(1 - 10^{-\frac{6t}{T}}\right)$$

❖ în cazul încetării emisiei sonore a sursei :

$$w = \frac{PT}{6V\,ln10} \cdot 10^{-\frac{6t}{T}}$$

✍ Se observă că densitatea maximă de energie sonoră este direct proporțională cu timpul de reverberație şi invers proporțională cu volumul încăperii.

5.8. SUPRAPUNEREA ZGOMOTELOR

O întrebare pe care ne-o putem pune este următoarea : DACĂ UNEI SURSE DE ZGOMOT, CARACTERIZATĂ DE NIVELUL INTENSITĂȚII ACUSTICE L_1, I SE ADAUGĂ O ALTĂ SURSĂ DE ZGOMOT CU NIVELUL INTENSITĂȚII ACUSTICE L_2, CÂT VA FI NIVELUL REZULTANT AL INTENSITĂȚII ACUSTICE ?

Răspunsul :

$$L = L_1 + L_2$$

este **greşit** ! Să explicăm în continuare de ce acest răspuns este greşit.

BIOGRAFIA DE LA PAGINA 275

Wallace Clement Sabine (1868-1919). Fizician american care a pus bazele acusticii arhitectonice. Legea care-i poartă numele a descoperit-o după ce în 1895, cu prilejul deschiderii muzeului Fogg, a fost solicitat să remedieze acustica sălii de conferințe, care avea mult de suferit din cauza reverberației excesive. Lucrările sale au ajutat la proiectarea pe baze ştiințifice a primei săli de concert moderne : Boston Symphony Hall (1900). În cinstea sa, unitatea de măsură a puterii de absorbție a sunetului a fost denumită sabin.

Formula nivelului intensității acustice este :

$$L = 10 lg \frac{I}{I_0}$$

unde I este intensitatea zgomotului, iar I_0 este intensitatea de referință. În cazul suprapunerii a două zgomote, energiile celor două unde sonore se însumează, astfel încât intensitatea totală este :

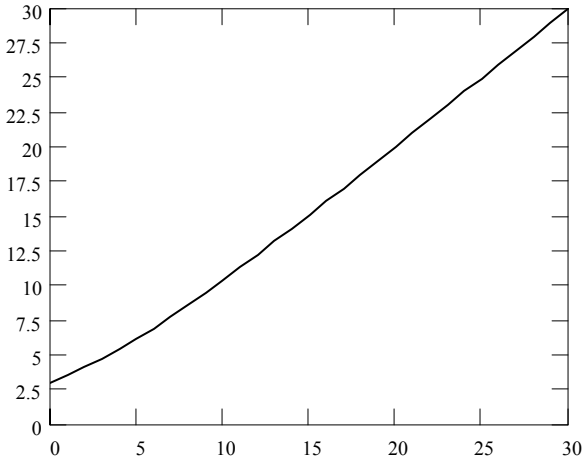
$$I = I_1 + I_2$$

Cum :

$$lg \frac{I}{I_0} = \frac{L}{10} \quad \Rightarrow \quad I = I_0 \cdot 10^{\frac{L}{10}}$$

rezultă :

$$I_0 \cdot 10^{\frac{L}{10}} = I_0 \cdot 10^{\frac{L_1}{10}} + I_0 \cdot 10^{\frac{L_2}{10}} \quad \Rightarrow \quad 10^{\frac{L}{10}} = 10^{\frac{L_1}{10}} \left(1 + 10^{\frac{L_2 - L_1}{10}} \right)$$



Diagramă pentru adunarea nivelelor de intensitate sonoră

Prin logaritmare, se obține :

$$\frac{L}{10} = \frac{L_1}{10} + lg \left(1 + 10^{\frac{L_2 - L_1}{10}} \right)$$

sau :

$$\boxed{L = L_1 + 10 lg \left(1 + 10^{\frac{L_2 - L_1}{10}} \right)}$$

Pe baza acestei relații se poate construi o diagramă pentru adunarea nivelelor de intensitate sonoră. Diagrama poate fi utilizată astfel :

❖ Să presupunem că se compun zgomotele cu nivelele de intensitate sonoră 60 dB, respectiv 65 dB.
❖ Nivelul rezultant nu este 125 dB !
❖ Nivelul rezultant se calculează astfel :
❖ Diferența între nivelele sonore este de 5 dB

PROBLEMA DE LA PAGINA 276

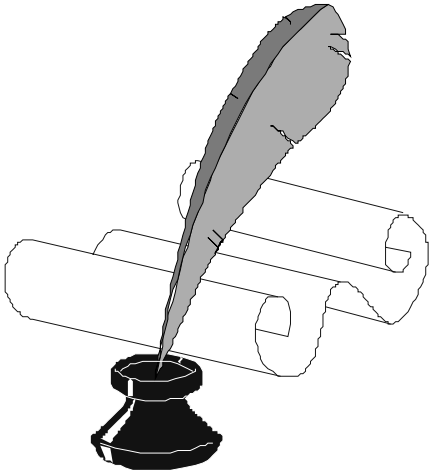
Câte surse identice de zgomot cu nivelul intensității acustice de 60 dB trebuie să emită împreună pentru ca nivelul total al intensității să fie de 120 dB ?

❖ Se citeşte ordonata punctului de abscisă egală cu diferența nivelelor sonore (în cazul nostru, diferenței de 5 dB îi corespunde abscisa de 6 dB)
❖ Se adaugă această valoare nivelului cel mai mic de intensitate sonoră (în cazul nostru, 60 dB).
❖ Rezultatul este nivelul rezultant al intensității sonore (în cazul nostru, 66 dB !).

5.9. ULTRASUNETE, GENERAREA ULTRASUNETELOR, APLICAȚIILE ULTRASUNETELOR

✍ Ultrasunetele sunt unde sonore a căror frecvență depăşeşte valoarea de 20000 Hz.

✍ Frecvența mare a ultrasunetelor comparativ cu sunetele induce o serie de proprietăți speciale. Astfel, pe de o parte ultrasunetele transportă cantități mari de energie, dar şi dispersia sau absorbția lor sunt amplificate. Ultrasunetele sunt caracterizate de lungimi de undă mici, astfel încât difracția lor este neglijabilă şi se poate considera că ele se propagă în linie dreaptă, putând parcurge distanța mari până la atenuarea completă.



Un fenomen caracteristic propagării ultrasunetelor în lichide este **cavitația**. Perturbațiile ultrasonore provoacă compresii sau dilatări locale în ritm extrem de rapid. Din acest motiv, straturile adiacente de lichid se pot „rupe” unul de celălalt, formându-se bule umplute cu vapori de lichid. Spargerea acestor bule este însoțită de apariția unor forțe locale extrem de puternice. Dacă în acest lichid este introdus un obiect metalic, şocurile astfel produse pot determina desprinderea stratului su-

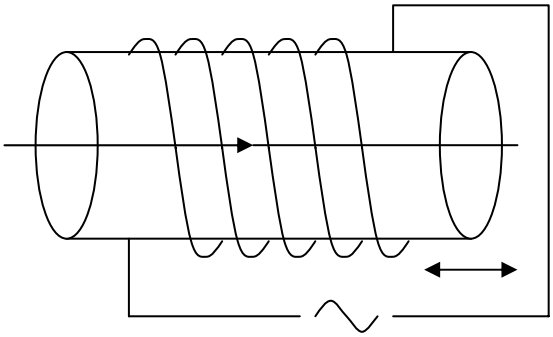
INFORMAȚIA DE LA PAGINA 277

Cavitația este însoțită şi de descărcări electrice locale. Acestea pot facilita unele reacții chimice (oxidare, reducere, hidroliză, polimerizare, depolimerizare), ultrasunetul căpătând în acest mod rolul unui catalizator. În prezența ultrasunetului, unele procese chimice se pot desfăşura mai rapid, la temperaturi mai scăzute sau cu randament crescut.

perficial de oxid care se formează pe suprafața metalului. Se realizează în acest mod o decapare a suprafeței metalice, care poate fi extrem de utilă în anumite cazuri (de exemplu, curățarea plăcilor de plumb ale unui acumulator de mașină are efecte benefice asupra duratei de viață a acumulatorului şi asupra performanțelor sale).

Principalele fenomene fizice utilizate pentru generarea ultrasunetelor sunt efectul magnetostrictiv şi efectul piezoelectric.

Prin **efect magnetostrictiv** se înțelege faptul că o bară confecționată dintr-un material feromagnetic se alungeşte sau se contractă când este supusă acțiunii unui câmp magnetic longitudinal.



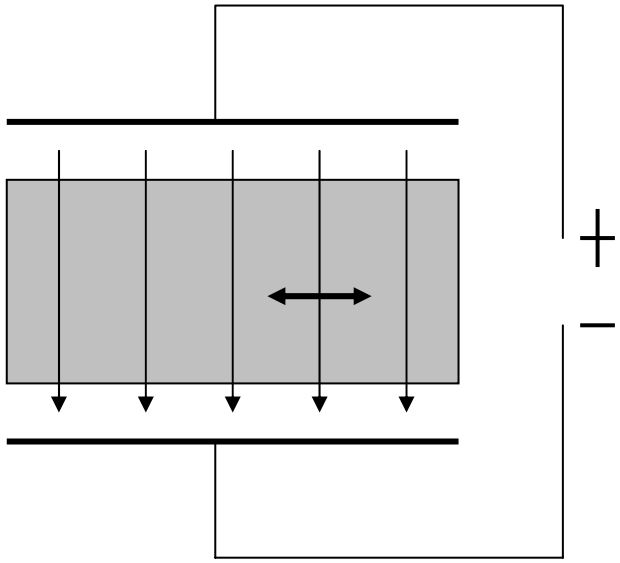
Un generator de ultrasunete care funcționează pe baza efectului magnetostrictiv cuprinde o sursă de tensiune alternativă, a cărei frecvență este egală cu aceea a ultrasunetului produs. Sursa alimentează o bobină înfăşurată pe un miez cilindric, feromagnetic. Bobina induce un câmp magnetic longitudinal în miez. Variațiile periodice ale acestui câmp provoacă comprimări şi alungiri succesive ale miezului feromagnetic. Vibrațiile mecanice ale miezului bobinei reprezintă tocmai sursa de ultrasunet.

Prin **efect piezoelectric** se înțelege fenomenul de modificare a dimensiunilor longitudinale ale unui cristal (de exemplu, cristal de cuarț) dacă în interiorul acestuia se stabileşte un câmp electric transversal.

Generatoarele care funcționează pe seama efectului piezoelectric au o construcție asemănătoare. Emițătorul de ultrasunete este o placă confecționată dintr-un cristal de cuarț, introdusă între plăcile unui condensator plan. Condensatorul este inclus într-un circuit electric şi în funcție de polarizarea plăcilor generează un câmp electric uniform care provoacă alungirea sau scurtarea miezului de cuarț.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 278

Frecvența ultrasunetelor emise prin efect piezoelectric depinde de grosimea plăcuței de cristal. În interiorul acesteia se formează unde staționare, iar grosimea corespunzătoare frecvenței fundamentale este egală cu jumătate din lungimea de undă a ultrasunetului corespunzător.



Mai trebuie remarcat că tot cele două efecte pot fi utilizate pentru construcția detectoarelor de ultrasunete. În cazul efectului magnetostrictiv, deformările mecanice longitudinale pe care le provoacă ultrasunetele ce interacționează cu bara feromagnetică generează un curent electric alternativ în bobina ce o înfăşoară. Acest curent poate fi amplificat, iar intensitatea sa este o măsură a tăriei ultrasunetului recepționat. În cazul efectului piezoelectric, vibrațiile mecanice ale plăcuței de cuarț determină apariția unui curent electric alternativ în circuitul electric al condensatorului.

Există numeroase aplicații ale ultrasunetelor. Dintre acestea enumerăm :

❖ Dispozitive de măcinare extrem de fină a unor materiale.

❖ Dispozitive utilizate pentru îndepărtarea peliculelor de rugină sau de ulei de pe suprafețele metalice sau de pe țesături.

❖ Dispozitive de sudură, la care calitatea sudurii este asigurată de eliminarea stratului subțire de oxid care există pe suprafețele ce urmează a fi îmbinate prin sudură.

❖ Aparatele utilizate pentru obținerea unor emulsii omogene ale unor lichide nemiscibile.

❖ Dispozitive de tăiere sau găurire a unor materiale.

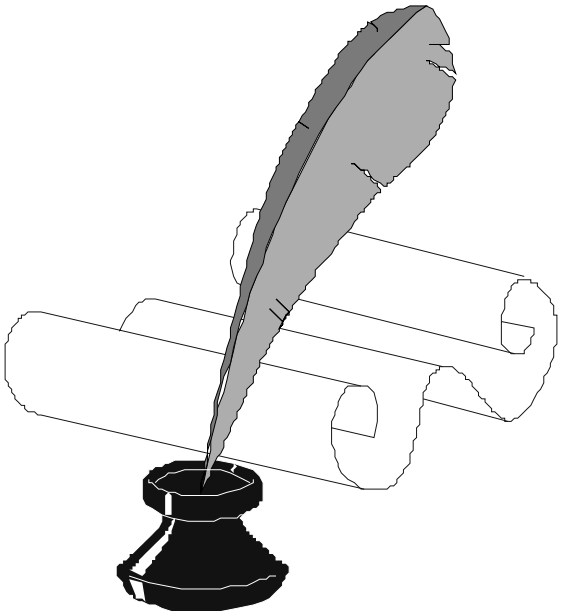
❖ Sonarele, adică sistemele de navigație care permit orientarea navelor pe seama captării ultrasunetelor reflectate pe obstacolele înconjurătoare.

❖ Aparatele de control nedistructiv al pieselor metalice sau al structurilor de beton.

INFORMAȚIA DE LA PAGINA 279

Variația lungimii unui material prin magnetostricțiune este destul de mică. Dacă se folosește un aliaj nichel-fier-vanadiu, într-un câmp magnetic de $5 \cdot 10^4$ A/m, alungirea relativă $\Delta l/l$ atinge valori de $5 \cdot 10^{-4}$. Ultrasunetele emise au frecvențe egale cu frecvențele proprii ale emițătorului : 25 kHz, dar şi multipli ai acesteia 50 kHz şi 100 kHz. La frecvențe mai mari efectul magnetostrictiv se diminuează.

❖ Ecografele, adică aparatele medicale care permit obținerea imaginii unor organe interne pe baza absorbției diferențiate a ultrasunetelor de către acestea.



În încheiere, vom aminti că şi în lumea animală întâlnim prezența ultrasunetelor. Astfel, liliecii emit pulsuri de ultrasunete, cu frecvențe cuprinse între 20 şi 60 de kHz. Aceste ultrasunete se reflectă pe obiectele înconjurătoare, sunt auzite de lilieci şi apoi analizate de creierul acestora, permițându-le să se orienteze în spațiu sau să-şi găsească prada. Există şi animale marine, cum ar fi delfinii sau balenele, care utilizează ultrasunetele pentru orientare, detectarea poziției bancurilor de peşti sau chiar comunicare. Există şi o explicație pentru această adaptare. În apă, lumina este puternic absorbită, ceea ce face ca vizibilitatea să fie doar de câțiva metri, chiar dacă apa este limpede. În schimb, distanța după care un ultrasunet cu frecvența de 50 kHz îşi micşorează intensitatea la jumătate este de 2,5 km.

CUGETAREA DE LA PAGINA 280

Cărțile trebuie să se inspire din ştiință, şi nu ştiința din cărți.

Francis Bacon (1561–1626)
filosof şi om de stat englez

CUPRINS

1. **CINEMATICA** 1
1.1. Sisteme de referinţă 1
1.2. Relativitatea mişcării şi a repausului..... 8
1.3. Principalele mărimi cinematice..... 10
1.4. Clasificarea mişcărilor după traiectorie şi legea de mişcare, principalele tipuri de mişcări 22
1.4.1. Mişcarea rectilinie uniformă 25
1.4.2. Mişcarea rectilinie uniform variată 28
1.4.3. Mişcarea circulară uniformă..... 31
1.4.4. Mişcarea oscilatorie armonică..... 36
1.5. Transformarea coordonatelor 38
1.5.1. Relaţia de compunere a vitezelor 42
1.5.2. Relaţia de compunere a acceleraţiilor 44
1.5.3. Transformarea Galilei..... 47
2. **DINAMICA**..... 49
2.1. Forţe..... 50
2.2. Principiile dinamicii newtoniene 59
2.2.1. Principiul inerţiei 59
2.2.2. Sisteme de referinţă inerţiale şi sisteme de referinţă neinerţiale……62
2.2.3. Principiul fundamental al dinamicii 63
2.2.4. Principiul acţiunii şi al reacţiunii 64
2.2.5. Principul acţiunii independente a forţelor simultane 65
2.3. Când sunt valabile principiile dinamicii ?..... 67
2.4. Forţe de inerţie..... 71
2.5. Tipuri de forţe 78
2.5.1. Forţe cu acţiune de la distanţă 79
2.5.1.1. Forţa gravitaţională, legea atracţiei universale 79
2.5.1.2. Greutatea 81
2.5.2. Forţe de contact 82
2.5.2.1. Forţe de contact între suprafeţe vecine 83
2.5.2.2. Forţa elastică 89
2.5.2.3. Forţe de tensiune 95

2.6. Teoremele dinamicii 96
2.6.1. Lucru mecanic şi putere 96
2.6.2. Forţe conservative, energie potenţială 100
2.6.3. Energia cinetică, teorema variaţiei energiei cinetice pentru un punct material 104
2.6.4. Teorema variaţiei energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale 105
2.6.5. Energie mecanică, teorema variaţiei energiei mecanice pentru un sistem de puncte materiale 107
2.6.6. Impuls, teorema variaţiei impulsului pentru un punct material……..109
2.6.7. Teorema variaţiei impulsului pentru un sistem de puncte materiale 111
2.6.8. Moment cinetic, momentul forţei, teorema variaţiei momentului cinetic pentru un punct material 113
2.6.9. Teorema variaţiei momentului cinetic pentru un sistem de puncte materiale..... 115
2.7. Grade de libertate, coordonate generalizate 118
2.8. Încheiere 130
3. **OSCILAŢII MECANICE**..... 131
3.1. Introducere..... 131
3.2. Tipuri de mişcări oscilatorii 136
3.2.1. O problemă de matematică..... 136
3.2.2. Oscilatorul armonic 142
3.2.3. Oscilatorul amortizat 146
3.2.4. Oscilaţii forţate 153
3.3. Compunerea oscilaţiilor armonice 158
3.3.1. Compunerea oscilaţiilor având aceeaşi frecvenţă şi direcţii paralele..... 158
3.3.2. Compunerea oscilaţiilor paralele de frecvenţe apropiate, fenomenul de bătăi 161
3.3.3. Compunerea oscilaţiilor având aceeaşi frecvenţă şi direcţii perpendiculare 163
3.3.4. Compunerea oscilaţiilor perpendiculare de frecvenţe diferite, figurile *Lissajous* 167
3.3.5. Oscilaţii periodice, serii *Fourier* 170

4. **UNDE** 175
4.1. Introducere 175
4.2. Ecuaţia diferenţială a undelor, soluţii particulare 177
4.2.1. Ecuaţia diferenţială a undelor 177
4.2.2. Soluţia generală a ecuaţiei undei plane 181
4.2.3. Soluţia ecuaţiei undelor sferice 185
4.2.4. Comportarea undelor sferice la distanţă mare de sursă 188
4.3. Unde elastice longitudinale 189
4.3.1. Viteza de propagare a undelor elastice longitudinale 191
4.3.2. Densitatea de energie în cazul undelor longitudinale 192
4.3.3. Transferul de energie 195
4.4. Viteza de propagare a undelor transversale 198
4.5. Fenomene întâlnite în cursul propagării undelor elastice 201
4.5.1. principiul Huygens - Fresnel 201
4.5.2. Reflexia 202
4.5.3. Refracţia 204
4.5.4. Reflexia totală 206
4.5.5. Coeficienţii de reflexie şi de transmisie 207
4.5.6. Interferenţa 214
4.5.6.1. Densitatea medie de energie, intensitatea undei 214
4.5.6.2. Caracteristicile şi condiţiile de producere ale interferenţei 216
4.5.6.3. Cazuri particulare de interferenţă 221
4.5.7. Difracţia 232
4.5.7.1. Caracterizarea difracţiei 232
4.5.7.2. Difracţia undelor sferice (difracţia Fresnel) 233
4.5.7.3. Difracţia undelor plane (difracţia Fraunhofer) 239
4.5.8. Dispersia undelor 243
4.5.8.1. Relaţiile de incertitudine 248
4.5.9. Efectul Doppler 251
4.6. Ultimul val 254
5. **ACUSTICA** 255
5.1. Introducere 255
5.2. Generalităţi 257
5.3. Viteza de propagare a sunetelor 257
5.4. Câmp sonor, presiune sonoră 259
5.5. Caracteristicile sunetelor 261
5.5.1. Tăria 261

5.5.2. Înălțimea şi timbrul 264
5.6. Fenomene care însoțesc propagarea sunetelor 266
5.7. Propagarea sunetelor în spații deschise şi în spații închise 267
5.7.1. Distribuția energiei sonore într-un spațiu închis 271
5.8. Suprapunerea zgomotelor 275
5.9. Ultrasunete, generarea ultrasunetelor, aplicațiile ultrasunetelor 277